CentraleSupélec

Stage de fin d'Études

Contrôle d'un écoulement de culot par interaction fluide-structure

Johann Moulin
Promotion 2015
Option Aéronautique et Espace
Filière Métiers de la Recherche

Superviseur ONERA :
Olivier Marquet

Tuteurs École :
Ronan Vicquelin (option)
Ann-Lenaig Hamon (filière)

02/05/2016 - 04/11/2016

CentraleSupélec

ONERA
THE FRENCH AEROSPACE LAB

CentraleSupélec

Elève-ingénieur : Moulin Johann (P2015)

Organisme d'accueil : ONERA, Département d'Aérodynamique Fondamentale et Expérimentale (DAFE), 8 rue des Vertugadins, 92190 Meudon, France.

Titre : Contrôle d'un écoulement de culot par interaction fluide-structure

Dates : 02/05/2016 - 04/11/2016

Résumé

L'écoulement d'un fluide autour d'un corps non-profilé (voiture, camion, gratte-ciel) est caractérisé par un décollement de l'écoulement, une forte traînée de pression et, à grand Reynolds, une allée de tourbillons de Von-Karman. Les efforts instationnaires alors subis par les structures peuvent, si la fréquence des tourbillons est proche d'un fréquence propre de la structure, engendrer un phénomène de résonance connu sous le nom de VIV (*Vortex-Induced Vibrations*). Les VIV constituent une préoccupation majeure, notamment pour l'industrie *offshore* ou le génie civil. Ainsi le contrôle de ce phénomène est-il aujourd'hui une thématique majeure de la recherche en aérodynamique. Durant ce stage, on étudie la possibilité d'utiliser l'interaction fluide-structure pour contrôler les VIV se développant sur un écoulement de culot. Pour cela, on envisage la configuration constituée d'un culot, équipé de deux petites plaques rigides, fixées aux coins du culot par des ressorts de torsion. L'analyse de stabilité linéaire est utilisée pour tester la stabilité du système sans intégrer les équations en temps. Après avoir introduit un formalisme adapté à la description des problèmes d'interaction fluide-structure, on présente l'analyse de stabilité linéaire du système couplé. Un phénomène d'instabilité dynamique lié à la résonance fréquentielle entre deux modes du système est mis en lumière. La possibilité d'un contrôle passif de l'écoulement de culot par l'interaction fluide-structure est ensuite discutée. Le rapport s'achève sur la présentation des premiers développements autour d'un code éléments finis de simulation en temps des phénomènes d'interaction fluide-structure. La discrétisation temporelle envisagée a la particularité de permettre de n'inverser à chaque pas de temps qu'un système linéaire, entraînant ainsi une diminution significative du coût de calcul. On montre une bonne adéquation entre les résultats linéaires et non-linéaires.

Table des matières

1 Introduction **6**
1.1 Introduction générale . . . 6
1.2 Objectifs . . . 7

2 Description du problème **8**

3 Description cinématique : le formalisme ALE **9**
3.1 Lagrangien vs Eulérien . . . 9
3.1.1 Formalisme Lagrangien . . . 9
3.1.2 Formalisme Eulérien . . . 10
3.2 Formalisme ALE . . . 10

4 Équations du mouvement **12**
4.1 Description cinématique . . . 12
4.2 Équations fluide . . . 12
4.3 Équations solide . . . 13
4.3.1 Solide rigide . . . 13
4.3.2 Solide élastique . . . 14
4.4 Version ALE des équations fluide et solide . . . 15
4.5 Équation d'extension . . . 16
4.6 Conditions limites et interfaces . . . 16
4.7 Récapitulatif . . . 17
4.8 Formulation faible . . . 17

5 Analyse de stabilité linéaire **20**
5.1 Recherche d'une solution de base . . . 22
5.1.1 Méthode de Newton . . . 22
5.1.2 Discrétisation éléments finis . . . 23
5.2 Perturbations . . . 24
5.3 Un problème linéarisé forcé . . . 24

6 Résultats autour des équations linéarisées **26**
6.1 Validation . . . 26
6.1.1 Solution de base stationnaire . . . 26
6.1.2 Code de stabilité . . . 28
6.2 Analyse de stabilité du système fluide seul . . . 29
6.2.1 Cas référence : culot seul . . . 29
6.2.2 Effets de l'ajout de plaques rigides . . . 30
6.3 Analyse du problème fluide-structure linéaire forcé . . . 31
6.3.1 Considérations de symétrie et erreurs numériques . . . 31
6.3.2 Physique du problème linéaire forcé . . . 33
6.4 Analyse de stabilité du système fluide-structure . . . 34
6.4.1 Variations de l'état de base . . . 34
6.4.2 Champs de base non-déformé . . . 35
6.4.3 Champs de base déformé . . . 42

6.4.4 Des stratégies de contrôle ? 44

7 Vers un code ALE non-linéaire ... 46

7.1 Quelle stratégie de couplage ? 46

7.2 Quelle description cinématique ? 47

7.3 Solution adoptée 47

7.3.1 Discrétisation temporelle 48

7.3.2 Formulation faible 49

7.3.3 Validation 50

7.4 Quelques résultats non-linéaires 54

8 Conclusion et perspectives 56

A Annexe : quelques propriétés utiles 58

B Annexe : Détails calculatoires pour l'analyse de stabilité linéaire 60

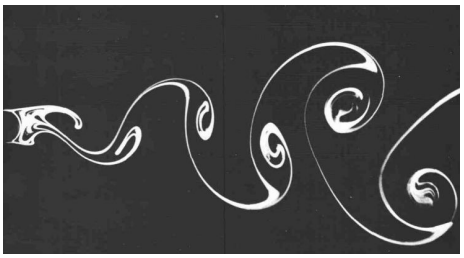
C Annexe : Symétries et équations linéarisées 65

1 Introduction

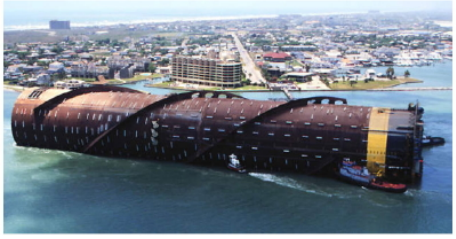
1.1 Introduction générale

L'écoulement d'un fluide autour d'un corps non-profilé (voiture, camion, gratte-ciel, . . .) est caractérisé par une région de faibles vitesses appelée sillage. La présence de ce sillage implique une forte traînée due au différentiel de pression entre l'amont et l'aval du corps. De plus, au-delà d'une certaine vitesse critique d'écoulement, se développe une allée de tourbillons connue sous le nom d'allée de Von Karmann. Celle-ci est le siège d'oscillations cohérentes de l'écoulement pouvant contenir, en conditions réelles, une énergie conséquente. Les efforts instationnaires ainsi engendrés font vibrer les structures : c'est le phénomène de *Vortex-Induced Vibrations* (VIV) [Williamson and Govardhan, 2004]. Le problème est d'autant plus critique que la fréquence des oscillations de l'écoulement s'approche d'une fréquence caractéristique de la structure. Un couplage fort se met en place, menant à de larges déformations. Cette situation est fréquemment rencontrée en pratique, dans l'industrie offshore [Russo et al., 1980], ou pour la construction de gratte-ciels [Irwin, 2010]. Par ailleurs, le lâcher tourbillonnaire issu d'un corps peut également impacter le fonctionnement d'un autre corps situé en aval. Ainsi le sillage instationnaire généré par le carénage entourant le rotor d'un hélicoptère peut interagir avec les surfaces portantes arrières et dégrader leurs performances aérodynamiques [Le Pape et al., 2013].

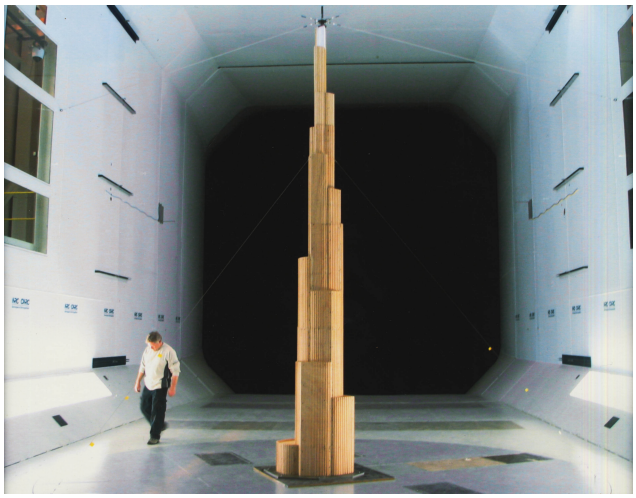
Aujourd'hui, la réduction de la trainée, comme l'amoindrissement des effets des VIV sont des préoccupations majeures pour la recherche et l'industrie. On regroupe habituellement sous le terme *contrôle d'écoulement* l'ensemble des stratégies permettant de modifier l'écoulement pour en améliorer les caractéristiques. Une idée simple pour contrôler le lâcher tourbillonnaire derrière un cylindre circulaire est par exemple de décorréler les tourbillons le long du tube en le recouvrant d'une strie hélicoïdale. Ainsi, même si des efforts importants sont toujours localement appliqués sur le tube, ceux-ci sont temporellement décorrélés le long du tube, de sorte que les vibrations résultantes de la structure complète sont réduites à un niveau tolérable sur toute une durée de vie. Cette première solution est une stratégie dite de contrôle passif, car aucun apport d'énergie n'est nécessaire à sa mise en œuvre [Zdravkovic, 1981] [Every et al., 1982]. Par ailleurs, des stratégies de contrôle actif ont été développées avec succès ces dernières années. Des procédés de soufflage et aspiration aux parois du corps considéré peuvent permettre de réduire drastiquement la traînée (en valeur moyenne et en composante instationnaire) (voir [Choi et al., 2008], [Delaunay and Kaiktsis, 2001], [Arcas and Redekopp, 2004] par exemple). En contrepartie d'une bonne efficacité, les stratégies de contrôle actif demandent (i) un apport énergétique supplémentaire et (ii) l'implémentation parfois délicate de lois de contrôle. Pour contourner ces difficultés, un axe de la recherche fondamental se développe aujourd'hui autour de l'utilisation de l'interaction fluide-structure afin de contrôler la stabilité des écoulements. Cette tendance est inspirée par l'observation de la nature [Fish and Lauder, 2006], et notamment par la compréhension du rôle des plumes dans les caractéristiques aérodynamiques des ailes de certains oiseaux [Favier et al., 2009]. Si le processus de sélection naturelle a préservé, au cours du temps, les phénotypes les mieux adaptés à chaque milieu, rien n'indique que ceux-ci constituent les solutions optimales aux problèmes posés en pratique pour l'Homme. Une simple reproduction de l'observation n'est donc pas une issue souhaitable. Aussi une compréhension détaillée des phénomènes mis en jeu est-elle nécessaire, afin de pouvoir produire



(a) Tourbillons derrière un cylindre à $\mathcal{R}e = 140$



(b) Stries hélicoïdales sur un pylone de plate-forme pétrolière



(c) Expériences en soufflerie pour tester le profil de la tour Burj Khalifa (Dubaï, 828 m)

FIGURE 2 – ***Vibrations Induites par Vortex (VIV) et contrôle.***

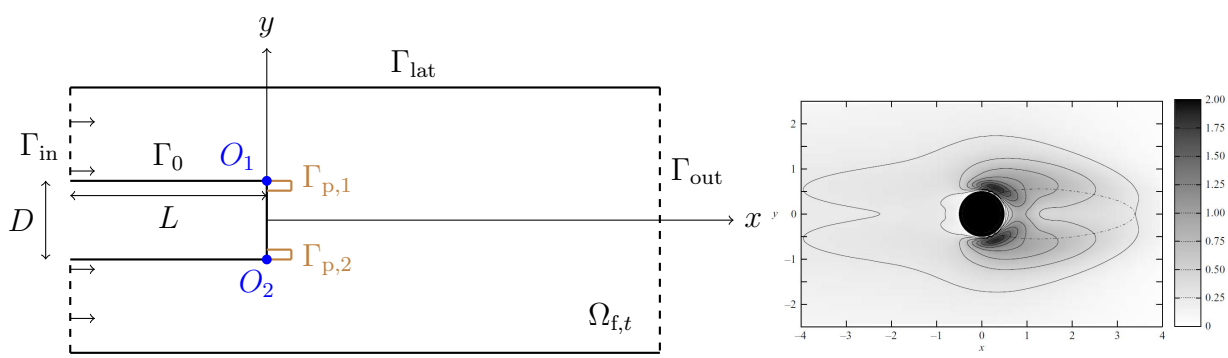
des solutions optimales pour l'Homme.

1.2 Objectifs

Le stage présenté ici s'inscrit dans le cadre d'une bourse de recherche *Starting Grant* de l'*European Research Council*, obtenue en 2014 par Olivier Marquet, ingénieur de Recherche à l'ONERA Meudon. L'objectif global de ce programme est d'améliorer la compréhension des phénomènes d'interaction fluide-structure dans un objectif de contrôle d'écoulement. L'idée est de transposer les outils développés durant les dernières décennies en mécanique des fluides autour des approches linéarisées des équations de Navier-Stokes (voir [Sipp et al., 2010] pour une synthèse). L'objectif initial de ce stage est utiliser un de ces outils, appelé analyse de stabilité linéaire, pour investiguer une configuration particulière qu'on décrit dans la section suivante. Un second objectif a par la suite émergé, consistant à mettre au point un code de simulation en temps pour des problèmes d'interaction fluide-structure. L'intérêt d'un tel code étant bien sûr de pouvoir comparer ses prédictions à celle de l'analyse de stabilité linéaire.

2 Description du problème

La configuration étudiée durant ce stage (Figure 3a) consiste en un écoulement autour d'un culot bidimensionnel (de longueur L et hauteur D), typique d'un corps non-profilé. On ajoute à l'arrière du culot deux plaques rigides (longueur l, hauteur d) fixées par des ressorts de torsion de raideur K. Les plaques peuvent donc tourner autour de leur axes (O_1 et O_2), soumises aux moments des forces de rappel élastique et des forces fluides. L'intérêt particulier de cette configuration réside (i) dans la simplicité de la description dynamique des solides (un seul degré de liberté pour chaque plaque) et (ii) dans la localisation des plaques. En effet, [Giannetti and Luchini, 2007] montrent, pour le cas classique du cylindre, qu'il existe deux régions symétriquement situées de part et d'autre de l'axe x dans lesquelles l'écoulement est particulièrement sensible à un forçage (Figure 3b). Ces deux régions correspondent à la zone où l'écoulement décolle du cylindre. On peut raisonnablement supposer que le mécanisme est transposable au cas du culot. Dans une optique de contrôle d'écoulement, l'idée sous-jacente est donc qu'une action de faible amplitude localisée dans un zone de grande sensibilité de l'écoulement aura des effets importants, à moindre coût énergétique.



(a) Configuration géométrique utilisée : un écoulement de culot avec deux plaques rigides tournant autour de leurs axes O_1 et O_2

(b) Réceptivité d'un cylindre plongé dans un écoulement axial (de gauche à droite) à un forçage localisé [Giannetti and Luchini, 2007]

FIGURE 3

3 Description cinématique : le formalisme ALE

Pour pouvoir investiguer la stabilité linéaire d'un système couplé fluide-structure, une attention particulière doit être apportée à la description du mouvement du domaine fluide. Dans cette section, on met en place la description cinématique du problème présenté en section 2

En mécanique des milieux continus, deux descriptions cinématiques classiques peuvent être adoptées. La première est dite Lagrangienne et consiste à suivre des particules de matière, appelées particules matérielles, dans leur mouvement. La seconde est dite Eulérienne et consiste à regarder passer, depuis un point fixe de l'espace, les particules matérielles. Ces deux points de vue, bien qu'équivalents, ne sont pas utilisés indifféremment en mécanique des fluides ou des solides. C'est que leurs caractéristiques respectives les rendent mieux adaptées à l'une ou l'autre des disciplines. Dès lors, on voit bien que le couplage d'un fluide et d'une structure va engendrer une première difficulté puisque qu'il faudra aboutir à une description commune du mouvement, et donc, réconcilier les points de vue Lagrangien et Eulérien. Dans la suite, on rappelle très brièvement les bases de ces deux points de vue avant de décrire un troisième formalisme, dit ALE (*Arbitrairement Lagrangien-Eulérien*) [Donea et al., 2004], particulièrement adapté aux problèmes d'interaction fluide-structure.

3.1 Lagrangien vs Eulérien

Définissons d'abord la terminologie utilisée par la suite :

— On appellera *domaine matériel* l'ensemble des particules matérielles (fluides ou solides) $\hat{\mathbf{x}}$ qui se déplacent au cours du mouvement.

— On appellera *domaine spatial* un ensemble de points $\mathbf{X}$ de l'espace.

3.1.1 Formalisme Lagrangien

Dans un formalisme Lagrangien on considère usuellement le domaine matériel $\hat{\Omega}$ correspondant à la configuration initiale ainsi que le domaine spatial Ω_t correspondant à la configuration déformée à l'instant t. Ces deux domaines sont reliés par une application bijective ϕ définissant la trajectoire de chaque particule matérielle $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \hat{\Omega} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega_t \\ (\hat{\mathbf{x}}, t) & \longmapsto & \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}, t). \end{array} \right.$$

Chaque point $\hat{\mathbf{x}}$ du domaine de calcul initial se déforme avec le milieu en suivant les trajectoires $\mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}, t)$. D'un point de vue numérique, cela signifie que le maillage se déplace avec le milieu et donc, que chaque maille contient la même particule matérielle au cours du mouvement. Cette propriété est particulièrement adaptée au traitement des matériaux dont la loi de comportement dépend de l'histoire - en plasticité notamment. De plus, la dérivée matérielle $\partial \bullet / \partial t|_{\hat{\mathbf{x}}}$, notée $d \bullet / dt$, correspond à une simple dérivée temporelle, évitant l'apparition dans les équations de termes d'advection (voir plus bas). Enfin, le suivi d'interface ou de frontière mobile est naturel. Ainsi recourt-on usuellement à une description Lagrangienne en mécanique des solides déformables. Cependant, si des déformations très importantes sont atteintes, la qualité du maillage est rapidement trop dégradée pour pouvoir poursuivre les calculs avec précision. Des opérations de re-maillage sont alors indispensables

malgré leur coût significatif et la diffusion numérique qu'elles introduisent généralement lors de l'interpolation de la solution de l'ancien maillage sur le nouveau maillage. Si nombre d'application en mécanique du solide se cantonnent à des "déformations raisonnables", permettant d'éviter le re-maillage, ce n'est jamais le cas en mécanique des fluides.

3.1.2 Formalisme Eulérien

La description du mouvement des fluides recourt usuellement à un formalisme Eulérien pour lequel le continuum s'écoule à travers un domaine spatial fixe, discrétisé par un maillage, fixe lui aussi. Les équations sont formulées dans ce domaine spatial fixe de sorte que la dérivée matérielle ne se résume plus à une dérivée temporelle. L'égalité bien connue suivante permet alors d'écrire la dérivée matérielle d'un fonction quelconque $f(\mathbf{X}, t)$ sur le maillage fixe :

$$\left.\frac{\partial[f(\mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}, t), t)]}{\partial t}\right|_{\hat{\mathbf{x}}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \left.\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right|_{\hat{\mathbf{x}}} \tag{1}$$

Le second terme du membre de droite est qualifié de terme d'advection. Grâce au formalisme Eulérien, on peut ainsi décrire les trajectoires complexes des particules matérielles rencontrées dans les fluides, mais au prix (i) d'un terme d'advection mathématiquement délicat à traiter et (ii) d'un formalisme inadapté au traitement des frontières mobiles.

3.2 Formalisme ALE

L'idée du formalisme ALE est de coupler les avantages du Lagrangien pour le solide et de l'Eulérien pour le fluide i.e. un maillage qui se déplace avec le solide pour pouvoir décrire naturellement l'interface fluide-solide sans pour autant être Lagrangien dans le fluide. Pour ce faire, on définit d'abord un troisième type de domaine :

— On appellera *domaine de référence* l'ensemble des points $\mathbf{x}$ de maillage (fluide ou solide), qui peuvent se déplacer au cours du mouvement.

A chaque instant, cette configuration de référence Ω est reliée à la configuration spatiale déformée Ω_t par une application bijective ϕ_{ALE} donnant la position de chaque point de maillage à l'instant t :

$$\phi_{ALE}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{s}} \\ \mathrm{Ext}[\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)|_{\Omega_s}](\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{2}$$

où $\mathrm{Ext}[\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)|_{\Omega_s}](\mathbf{x}, t)$ est une extension arbitraire du mouvement du maillage solide au maillage fluide. Elle doit respecter la condition de continuité suivante sur l'interface fluide-solide Γ_{fs} :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}}, \qquad \mathrm{Ext}[\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)|_{\Omega_s}](\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \tag{3}$$

Le maillage solide est donc décrit de manière purement Lagrangienne, alors que le maillage de la zone fluide n'est ni eulérien, ni lagrangien. Proche de la zone solide, il s'adapte au mouvement du solide ; loin du solide, il est fixe. En théorie, le choix de l'extension est purement arbitraire, mais en pratique on privilégiera une extension (i) suffisamment régulière pour ne pas trop distordre les mailles fluides au cours du mouvement et (ii) dont la mise en

oeuvre numérique n'est pas trop lourde. On reviendra sur les équations régissant l'extension en section 4.5 ;

Enfin, on peut relier, comme dans l'équation (1), la dérivée temporelle à $\mathbf{x}$ constant à la dérivée temporelle à $\mathbf{X}$ constant par :

$$\left.\frac{\partial[f(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t)]}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\left.\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \tag{4}$$

4 Équations du mouvement

4.1 Description cinématique

Dans ce travail, on décrit l'interaction fluide-structure par un formalisme de type ALE.

Grâce à l'application ϕ_{ALE}, on peut définir en tout point du domaine de référence Ω le déplacement :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},t) = \phi_{ALE}(\mathbf{x},t) - \mathbf{x} \tag{5}$$

On rappelle que dans le solide, $\boldsymbol{\xi}$ correspond bien au déplacement des particules matérielles alors que dans le fluide $\boldsymbol{\xi}$ ne correspond qu'au déplacement des sommets du maillage. On définit également le gradient de la déformation et son déterminant :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \phi_{ALE}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Id} + \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi} \qquad\qquad J = \det \mathbf{F} \tag{6}$$

où $\nabla_{\mathbf{x}} \bullet$ st le gradient de $\bullet$, calculé dans la configuration de référence.

Enfin la vitesse de maillage $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = \left.\frac{\partial \phi_{ALE}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \tag{7}$$

4.2 Équations fluide

On décrit le fluide par les équations classiques de Navier-Stokes incompressibles, ici présentée dans leur forme eulérienne :

$$\forall \mathbf{X} \in \Omega_{\mathrm{f},t}, \qquad \rho_f \left(\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})\mathbf{u} \right) = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}} \tag{8}$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{9}$$

où $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \bullet$ est la divergence de $\bullet$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}$ le tenseur des contraintes pour un fluide Newtonien :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}(\mathbf{X}) = -p\mathbf{Id} + \mu_f(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}^T) \tag{10}$$

avec ρ_f la masse volumique fluide et μ_f la viscosité cinématique.

On adimensionne ces équations par une longueur caractéristique D, un temps caractéristique D/U_∞ et une masse caractéristique $\rho_f D^3$. On obtient alors :

$$\forall \mathbf{X} \in \Omega_{\mathrm{f},t}, \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}} \tag{11}$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}(\mathbf{X}) = -p\mathbf{Id} + \frac{1}{\mathcal{R}e}(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}^T) \tag{13}$$

avec $\mathcal{R}e = \rho_f D U_\infty / \mu_f$ le nombre de Reynolds.

4.3 Équations solide

On présente dans cette section deux modèles envisageables pour décrire le mouvement des deux plaques solides attachées au culot. Le premier est un modèle simple de solide rigide relié au culot par un ressort de torsion. Le second modèle est de type solide élastique. Il est présenté dès ici en prévision de la partie 7.

4.3.1 Solide rigide

Cinématique des plaques

Dans l'esprit du formalisme ALE, on veut décrire ici le mouvement des plaques rigides dans la configuration de référence. On doit donc donner une fonction qui associe à chaque point $\mathbf{x}$ de la configuration de référence, la position $\mathbf{X}$ de la plaque à l'instant courant, en fonction de l'angle θ que fait la plaque avec l'horizontale. A cause de l'épaisseur non nulle d des plaques, un pur mouvement de rotation de corps rigide n'est pas cinématiquement acceptable. Pour contourner cette difficulté on propose de séparer la plaque en trois régions (voir Figure 4) :

1. Sur S_1 et S_2 un mouvement de rotation de corps rigide classique est utilisé :

$$\mathbf{X}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta) = \mathbf{x}_{O_i} + \mathbf{R}(\theta)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{O_i}) \tag{14}$$

   avec $\mathbf{R}(\theta)$ la matrice de rotation d'angle θ.

2. Sur S_3 on associe à chaque $\mathbf{x}$ de la configuration la position courante $\mathbf{X}$ donnée par :

$$\mathbf{X}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta) = \mathbf{X}_A + \frac{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_A||}{||\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A||}(\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A) \tag{15}$$

   où $\mathbf{X}_B(\theta) = \mathbf{X}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x}_B,\theta)$ (on note que $\mathbf{x}_B \in S_2$) et $\mathbf{X}_A(\theta)$ est déterminé tel que S_3 reste toujours parallèle à S_1, *i.e.* $\mathbf{X}_A(\theta) = [\mathbf{X}_B(\theta).\mathbf{e_y} - \mathbf{X}_B(\theta).\mathbf{e_x}\,\tan(\theta)]\,\mathbf{e_y}$

Le déplacement et la vitesse d'un plaque sont donc définis par :

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta) = \mathbf{X}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta) - \mathbf{x} \tag{16}$$

$$\mathbf{u}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta)}{\partial t} \tag{17}$$

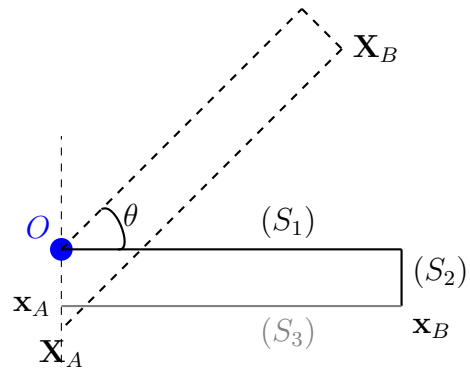


FIGURE 4 – ***Description cinématique des plaques.***

Dynamique des plaques

On considère des plaques rigides, attachées aux coins du culot par des ressorts de torsion linéaires, et soumises aux forces fluides. Leur mouvement est donc régi par deux équations d'oscillateur harmonique excité :

$$I\frac{\partial^2\theta_i}{\partial t^2} + K\theta_i = \int_{\Gamma_{\mathrm{p,i,t}}} \left((\mathbf{X} - \mathbf{X}_{O_i}) \wedge \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}\mathbf{n}_{\mathbf{X}}\right) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{z}} \tag{18}$$

Soit en version adimmensionnée :

$$\frac{\partial^2\theta_i}{\partial t^2} + \omega_0^2\theta_i = \frac{1}{\tilde{m}\chi}\int_{\Gamma_{\mathrm{p,i,t}}} \left((\mathbf{X} - \mathbf{X}_{O_i}) \wedge \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}\mathbf{n}_{\mathbf{X}}\right) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{z}} \tag{19}$$

Avec la pulsation propre adimensionnée $\omega_0 = \sqrt{K/J}D/U_\infty$ le rapport des masses volumiques fluide et solide $\tilde{m} = \rho_s/\rho_f$ et $\chi = ld/(3D^2)\,(l^2 + d^2)/D^2$ le facteur de forme des plaques (fonction des paramètres adimensionnels l et d)

4.3.2 Solide élastique

L'équation de conservation de la quantité de mouvement pour le solide s'écrit, dans sa forme habituelle (lagrangienne) :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_s, \qquad \rho_s \left.\frac{\partial^2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}{\partial t^2}\right|_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}\mathbf{F}^{-T}) \tag{20}$$

Avec $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}$ le *tenseur des contraintes de Cauchy.*

Dans cette étude les matériaux élastiques seront décrit par une loi de comportement de type *Saint-Venant Kirchhoff* :

$$\mathbf{S} = 2\mu_s\mathbf{E} + \lambda_s \mathrm{tr}(\mathbf{E})\mathbf{Id} \tag{21}$$

où $\mathbf{S}$ est le *second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff*, μ_s et λ_s sont les coefficients de Lamé. Avec le *tenseur des déformations de Green-Lagrange* :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{Id}) \tag{22}$$

On rappelle que le $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}$ et $\mathbf{S}$ sont reliés par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}} = \frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \tag{23}$$

NB : dans la limite des petites déformations et des petits déplacements, on retrouve $J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}\mathbf{F}^{-T} \simeq 2\mu_s\boldsymbol{\epsilon} + \lambda_s \mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{Id}$ où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations linéarisé.

Après adimensionnement, on obtient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{s}}, \qquad \left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}{\partial t^2}\right|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\tilde{m}}\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}\mathbf{F}^{-T}) \tag{24}$$

en introduisant le rapport des masses volumiques $\tilde{m} = \dfrac{\rho_s}{\rho_f}$.

4.4 Version ALE des équations fluide et solide

Équations fluides La première étape vers les équations fluides ALE consiste à remplacer la dérivée temporelle à $\mathbf{X}$ constant de (11) par un dérivée à $\mathbf{x}$ constant (c'est bien la dérivée temporelle à $\mathbf{x}$ constant qu'on calcule facilement en pratique, à partir de la solution discrète à différents instants). On obtient immédiatement que (11) devient :

$$\forall \mathbf{X} \in \Omega_{\mathrm{f},t}, \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u})(\mathbf{u}-\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}} \tag{25}$$

La deuxième étape consiste à écrire (25), (12) et (13) dans le domaine de référence et non plus dans le domaine spatial. En utilisant les propriétés présentées en Annexe A, on aboutit immédiatement aux équations ALE, formulées *dans le domaine de référence* :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{f}}, \qquad J\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + ((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})J\mathbf{F}^{-1})(\mathbf{u}-\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{F}^{-T}) \tag{26}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u}) = 0 \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u}, p) = -p\mathbf{Id} + \frac{1}{\mathcal{R}e}((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}^T) \tag{28}$$

On note qu'on peut aussi utiliser le formalisme ALE, sans pour autant effectuer les calculs dans le domaine de référence pour le fluide, notamment pour le développement de codes en temps [Fernández et al., 2007]. Dans ce cas, on utilise donc les équations (25), (12) et (13). Pour ce travail, on décide d'utiliser la formulation dans le domaine de référence (26), (27) et (28) pour des raisons techniques, liées à l'analyse de stabilité linéaire, qu'on expliquera plus loin.

Équations solides On note tout d'abord que pour le cas solide élastique, les équations sont par défaut sous leur forme ALE puisqu'on a vu que l'utilisation du formalisme ALE revenait à être Lagrangien pour le solide. Pour le cas des plaques rigides, il faut simplement transposer le terme de moment des forces fluides dans la configuration de référence. En utilisant la formule de Nanson (voir Annexe A), on obtient immédiatement :

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + \omega_0^2\theta_i = \frac{1}{\tilde{m}\chi}\int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \left((\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x}, \theta_i) - \mathbf{x}_{O_i}) \wedge J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}\right) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{z}} \tag{29}$$

4.5 Équation d'extension

Pour compléter le système d'équations ALE, il faut définir l'extension $\mathrm{Ext}[\mathbf{X}(\mathbf{x},t)|_{\Omega^{\mathrm{s}}}]$ dans $\Omega_{\mathrm{f},t}$. Par mimétisme avec l'équation solide, on pose :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}\mathbf{F}^{-T}) = 0 \tag{30}$$

Pour $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}$, quelques choix classiques dans la littérature sont :

— Type *Laplace* : $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}} = \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}$

— Type *élasticité linéaire* : $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}} = (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{Id} + \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} + \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}^T}$

— Type *élasticité linéaire pondérée* : $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{h_\tau}\left((\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{Id} + \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} + \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}^T}\right)$, où h_τ est la taille locale du maillage. L'idée est donc ici de reporter les déformations du domaine sur les plus grandes mailles, qui peuvent se déformer sans risque de chevauchement d'arêtes.

4.6 Conditions limites et interfaces

Conditions limites Des conditions de Dirichlet sont imposées sur Γ_0 (non-glissement, $\mathbf{u} = 0$) ainsi que sur Γ_{in} où on utilise une couche limite de type Karmann-Polhausen (d'épaisseur $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1$ dans toute l'étude) :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{in}}, \qquad \mathbf{u} = f\left(|y| - \frac{D}{2}\right)\mathbf{e}_{\mathbf{x}} \tag{31}$$

avec

$$f(\eta) = \begin{cases} 1 - (1 - \frac{\eta}{\delta_{BL}})^3(1 + \frac{\eta}{\delta_{BL}}) & \text{si } \eta \leq 1 \\ 1 & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases} \tag{32}$$

Sur les surfaces latérales Γ_{lat}, on impose une vitesse verticale nulle : $v = 0$. La condition limite sur Γ_{out} est de type écoulement libre : $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}\mathbf{n}_{\mathbf{X}} = 0$.

Conditions d'interface A l'interface fluide-solide, on doit assurer la continuité de la vitesse et de la contrainte :

$$\forall \mathbf{X} \in \Gamma_{\mathrm{fs},t} \qquad \mathbf{u}(\mathbf{X},t) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} (\phi_{ALE}^{-1}(\mathbf{X}),t) \tag{33}$$

$$\forall \mathbf{X} \in \Gamma_{\mathrm{fs},t} \qquad \left[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}\mathbf{n}_{\mathbf{X}}\right](\mathbf{X},t) = \left[J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}\right](\phi_{ALE}^{-1}(\mathbf{X}),t) \tag{34}$$

Soit, formulé dans le domaine de référence :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}} \qquad \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} (\mathbf{x},t) \tag{35}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}} \qquad \left[J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}\right](\mathbf{x},t) = \left[J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}\right](\mathbf{x},t) \tag{36}$$

Enfin la condition de continuité du déplacement à l'interface fluide-solide :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}} \qquad \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t) \tag{37}$$

Note : si le modèle de solide rigide est utilisé, la condition de continuité de la contrainte est supprimée.

4.7 Récapitulatif

On récapitule ici les équations du problème formulées dans le domaine de référence, desquelles on partira dans toute la suite :

Modèle solide rigide

$$J \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + ((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})J\mathbf{F}^{-1})(\mathbf{u}-\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{F}^{-T}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{f}} \tag{38}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{f}} \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + \omega_0^2 \theta_i = \frac{1}{\tilde{m}\chi} \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \left((\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta_i) - \mathbf{x}_{O_i}) \wedge J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}\right) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{z}} \qquad i = 1,2 \tag{40}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}\mathbf{F}^{-T}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{f}} \tag{41}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta_i,t) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}} \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta_i,t) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{p},i} \tag{43}$$

Modèle solide élastique

$$J \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + ((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})J\mathbf{F}^{-1})(\mathbf{u}-\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{F}^{-T}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{f}} \tag{44}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{f}} \tag{45}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2}\right|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\tilde{m}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}\mathbf{F}^{-T}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{s}} \tag{46}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}\mathbf{F}^{-T}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{f}} \tag{47}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} (\mathbf{x},t) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}} \tag{48}$$

$$\left[J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}\right](\mathbf{x},t) = \left[J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}\right](\mathbf{x},t) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}} \tag{49}$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}} \tag{50}$$

4.8 Formulation faible

Dans les différentes parties à venir, on discrétisera spatialement le problème par une méthode de type éléments finis. La première étape est donc de dériver une formulation variationnelle du problème. On raisonne ici avec le modèle de solide rigide, mais des dérivations identiques peuvent être réalisées avec le modèle de solide élastique. De plus, on omet les forces volumiques.

On définit l'espace $\mathcal{V}(\Omega) = \{\check{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega),\ \check{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \backslash \Gamma_{\mathrm{p},i}\}$

1. **Fluide** : En multipliant (38) par $\check{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega^{\mathrm{f}})$ et (39) par $\check{p} \in \mathcal{L}^2(\Omega^{\mathrm{f}})$, en intégrant sur Ω^{f}, puis en intégrant par partie le terme de divergence on obtient :

$$\int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left\{ J \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} + ((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}) J \mathbf{F}^{-1})(\mathbf{u}-\mathbf{w}) \cdot \check{\mathbf{u}} \right.$$
$$\left. \left[J \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}_b}(\mathbf{u},p)\mathbf{F}^{-T} \right] : \nabla_{\mathbf{x}}\check{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u})\, \check{p} \right\} + \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \mathbf{f} \cdot \check{\mathbf{u}} = 0 \quad (51)$$

Où on introduit $\mathbf{f} = J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u},p)\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}^{\mathrm{s}}$, avec $\mathbf{n}^{\mathrm{s}}$ la normale sortante au solide. On note que $\mathbf{f}$ représente la force surfacique exercée par le fluide sur le solide.

2. **Solide** : La formulation faible est immédiate pour le modèle solide rigide :

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + \omega_0^2 \theta_i - \frac{1}{\tilde{m}\chi} \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \left((\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta_i) - \mathbf{x}_{O_i}) \wedge \mathbf{f} \right) \cdot \mathbf{e_z} = 0 \quad (52)$$

3. **Extension** : En multipliant (41) par $\check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}} \in \mathcal{V}(\Omega^{\mathrm{f}})$, en intégrant sur Ω^{f} puis en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left[J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{F}^{-T} \right] : \nabla_{\mathbf{x}}\check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \boldsymbol{\phi} \cdot \check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}} = 0 \quad (53)$$

Où on introduit $\boldsymbol{\phi} = J\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}^{\mathrm{s}}$ qui représente la *pseudo-contrainte* exercée par l'extension à l'interface fluide-solide. Il ne s'agit évidemment pas d'une grandeur physique ; $\boldsymbol{\phi}$ ne joue que le rôle de multiplicateur de Lagrange pour imposer la continuité du déplacement sur $\Gamma_{\mathrm{p},i}$

4. **Conditions limites** : Dans ce projet, on choisit d'imposer les conditions limites sur $\Gamma_{\mathrm{p},i}$ (uniquement) sous forme faible. Il s'agit d'utiliser un espace de fonctions test dont les degrés de liberté sont actifs sur $\Gamma_{\mathrm{p},i}$ malgré les conditions de Dirichlet dont on y dispose (d'où la forme de $\mathcal{V}$), tout en ajoutant les conditions limites sous forme de contraintes dans la formulation variationnelle. Ces contraintes seront respectées grâce à l'introduction de multiplicateurs de Lagrange. C'est le rôle joué par $\mathbf{f}$ (qui permet de satisfaire (42)) et $\boldsymbol{\phi}$ (qui permet de satisfaire (43)). Plusieurs exemples dans la littérature ([Bazilevs, 2007] par exemple) montrent que l'utilisation de conditions limites sous forme faible permet d'obtenir une convergence en maillage plus rapide que sous forme forte. Comme les plaques sont une zone où on devrait théoriquement raffiner le maillage, l'utilisation de conditions faibles y est indiquée. Pour obtenir les contraintes sous forme variationnelle, on multiplie simplement (42) par $\check{\mathbf{f}} \in \mathcal{L}^2(\Gamma_{\mathrm{p},i})$ et (43) par $\check{\boldsymbol{\phi}} \in \mathcal{L}^2(\Gamma_{\mathrm{p},i})$. On a après intégration sur $\Gamma_{\mathrm{p},i}$:

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{p},i}(\theta_i)) \cdot \check{\mathbf{f}} = 0 \quad (54)$$

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} (\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} - \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\theta_i)) \cdot \check{\boldsymbol{\phi}} = 0 \quad (55)$$

Le système (38)-(43) peut donc s'écrire sous la forme simplifiée suivante, où l'on sépare les termes stationnaires (regroupés dans un résidu noté $\mathcal{R}$) des termes instationnaires (regroupés dans $\mathcal{I}$) :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u},\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) + \mathcal{R}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u},p,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}},\mathbf{f}) &= 0 && (56)\\
\mathcal{I}^{\mathrm{s}}(\theta_i) + \mathcal{R}^{\mathrm{s}}(\theta_i,\mathbf{f}) &= 0 && (57)\\
\mathcal{R}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}},\boldsymbol{\phi}) &= 0 && (58)\\
\mathcal{I}^{\mathbf{u}}(\theta_i) + \mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) &= 0 && (59)\\
\mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}},\theta_i) &= 0 && (60)
\end{aligned}
$$

On précise donc que :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u},\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) &= \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left\{ J \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} - (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}) J \mathbf{F}^{-1}) \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} \right\}\\
\mathcal{I}^{\mathrm{s}}(\theta_i) &= \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2}\\
\mathcal{I}^{\mathbf{u}}(\theta_i) &= -\int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\theta_i)}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{f}}\\
\mathcal{R}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u},p,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}},\mathbf{f}) &= \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left\{ ((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}) J \mathbf{F}^{-1})\mathbf{u}\cdot\check{\mathbf{u}} + \left[J \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}_b}(\mathbf{u},p)\mathbf{F}^{-T} \right] : \nabla_{\mathbf{x}}\check{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u})\,\check{p} \right\} + \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \mathbf{f}\cdot\check{\mathbf{u}}\\
\mathcal{R}^{\mathrm{s}}(\theta_i,\mathbf{f}) &= \omega_0^2\theta_i - \frac{1}{\tilde{m}\chi}\int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \left((\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x},\theta_i) - \mathbf{x}_{O_i}) \wedge \mathbf{f} \right) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{z}}\\
\mathcal{R}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}},\boldsymbol{\phi}) &= \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left[J \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{F}^{-T} \right] : \nabla_{\mathbf{x}}\check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \boldsymbol{\phi}\cdot\check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}}\\
\mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \mathbf{u}\cdot\check{\mathbf{f}}\\
\mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}},\theta_i) &= \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} (\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} - \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\theta_i)) \cdot \check{\boldsymbol{\phi}}
\end{aligned}
$$

5 Analyse de stabilité linéaire

La stabilité des systèmes est un préoccupation majeure des physiciens dès la deuxième moitié du XIXème siècle. On en trouve une définition dans un essai publié par Maxwell [Maxwell, 1873] :

> *"When an infinitely small variation of the present state will alter only by an infinitely small quantity the state at some future time, the condition of the system, whether at rest or in motion, is said to be stable but when an infinitely small variation in the present state may bring about a finite difference in the state of the system in a finite time, the system is said to be unstable"*

En mécanique des fluides, l'intérêt d'étudier la stabilité est d'autant plus fort que les solutions analytiques aux équations de Navier Stokes sont rares - et le coût des simulations en temps prohibitif. En 1883, Lord Rayleigh [Rayleigh, 1883] utilise l'analyse de stabilité pour expliquer le phénomène observé lorsqu'une couche de liquide dense se retrouve au dessus d'une couche de liquide moins dense. Dans cette approche, Rayleigh considère des *perturbations* de vitesse et pression autour d'un *état de base* (deux couches de liquides au repos, de densités différentes), dont il veut tester la stabilité. Les invariances du problème permettent de décomposer ces perturbations - temporellement et spatialement - en modes de Fourier, *sauf* dans la direction du champs de pesanteur. Rayleigh aboutit ainsi à une condition de stabilité de manière purement analytique. De nos jours, les capacités de calcul des ordinateurs permettent (i) de calculer des états de base en deux ou trois dimensions, puis (ii) d'en tester la stabilité en considérant des perturbations spatialement quelconques (seule la direction temporelle reste décomposée en modes de Fourier). De nombreux phénomènes ont ainsi pu être expliqué par l'analyse de stabilité : apparition des allées de Von Karmann derrière un corps non-profilé plongé dans un écoulement [Zebib, 1987], [Jackson, 1987] ; destabilisation d'une couche limite laminaire par les ondes de Tollmien-Schlichting [Reed et al., 1996] ; oscillations de poussée dans les moteurs à propulsion solide [Chedevergne et al., 2006] ; description de la stabilité de paires de tourbillons (vortex de bout d'aile d'avion, typiquement) [Jacquin et al., 2005] Ces méthodes d'analyse de stabilité linéaire sont au départ conçues pour déterminer la vitesse critique au-delà de laquelle l'écoulement devient instable, savoir si l'instabilité sera statique ou dynamique, ou encore en déterminer la fréquence (au moins proche du seuil de stabilité). Mais récemment, de nouvelles avancées ont permis d'étendre ces méthodes pour calculer la fréquence d'un écoulement instable, même loin du seuil de stabilité, ouvrant la perspective de nouvelles utilisations [Barkley, 2006] [Manti č Lugo et al., 2014].

En règle générale, on peut décomposer l'analyse de stabilité linéaire en quatre étapes :

1. Calcul d'un état de base
2. Linéarisation des équations du mouvement autour de cet état de base
3. Décomposition des perturbations en modes de Fourier temporels (aussi appelés *modes normaux*) pour obtenir un problème aux valeurs propres (les valeurs propres sont les fréquences complexes des modes de Fourier).
4. Résolution du problème aux valeurs propres

En interaction fluide-structure, la non linéarité n'est pas uniquement concentrée dans le terme d'advection de Navier-Stokes, elle apparaît également dans la structure (dans le cadre

des grandes déformations), ainsi que dans les mouvements du domaine fluide lui-même. Linéariser un problème fluide-structure c'est donc linéariser non seulement par rapport aux variables classique $\mathbf{u}$, p, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}$, mais aussi par rapport au domaine de calcul qui se déforme. Pour pratiquer une telle linéarisation, plusieurs options sont envisageables :

1. On *conserve les équations de Navier-Stokes dans leur formalisme classique (Eulérien)* où le domaine fluide est fonction de $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}$, mais on prend en compte ces déformations à travers :
   — soit la notion de *shape derivative* [Moubachir and Zolesio, 2006], notamment utilisée dans le cadre de travaux sur l'optimisation de forme. A notre connaissance, aucune analyse de stabilité n'a été formulée de la sorte. En revanche la dérivée de forme est utilisée en interaction fluide-structure, notamment pour obtenir la Jacobienne exacte d'un problème non-linéaire dans le cadre d'une méthode de Newton [Fernández and Moubachir, 2005].
   — soit des *conditions de transpiration*. On désigne par ce terme une modification des conditions limites de continuité de vitesse et contrainte sur l'interface fluide-solide telle que les conditions modifiées traduisent le mouvement du domaine fluide. Ces conditions sont particulièrement utilisées par l'ingénierie aéronautique pour les problèmes d'aéroélasticité [Raj and Harris, 1993], [Fernández and Le Tallec, 2003]. Elles restent cependant peu utilisées pour de l'analyse de stabilité linéaire.
2. On *utilise la forme ALE des équations fluides*, exprimée dans la configuration de référence. Cela permet de transférer toute l'information sur la déformation du domaine de calcul dans les équations du mouvement, elles-même formulées dans un domaine fixe. Ainsi, la linéarisation peut être pratiquée au sens usuel, pour chaque variable du problème : $\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}$ et $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}$. On trouve dans [Pedraglio, 2015] une des rares applications de cette méthode.
3. On *ne résout pas les équations de Navier-Stokes*. On recourt à la place à un modèle pour quantifier les efforts fluides. On ne résout alors qu'un problème pour la structure forcée (et parfois un problème simplifié pour le fluide). La majorité des analyses de stabilité linéaire en interaction fluide-structure sont réalisées de cette façon : problèmes de cylindres dans un écoulement axial [Hannoyer and Paidoussis, 1978], [De Langre et al., 2007], tuyaux avec écoulement interne [Paidoussis and Semler, 1993], drapeaux [Argentina and Mahadevan, 2005], [Michelin et al., 2008].

Ce bref aperçu des différentes méthodes d'analyse de stabilité pour des problèmes fluide-structure montre que la prise en compte des équations de Navier-Stokes complètes est rarement proposée. Au-delà de l'analyse de stabilité, toutes les autres techniques basées sur la linéarisation des équations du mouvement ont été également très peu (ou pas du tout) utilisées en interaction fluide-structure. Il y a par conséquent un clair intérêt à investiguer cette zone peu explorée. Dans la suite, on réalise donc l'analyse de stabilité dans le cadre de l'option 2 décrite précédemment *i.e.* à partir des équations ALE écrites en configuration de référence, comme formulées au paragraphe 4.7.

5.1 Recherche d'une solution de base

On vient de voir que la première étape à toute analyse de stabilité est de calculer une solution de base stationnaire. Dans la suite on notera ϕ_b toute grandeur ϕ relative à cette solution de base. Pour trouver l'état base, on doit résoudre le système couplé d'équations aux dérivées partielles non-linéaires suivant :

$$\mathcal{R}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u}_b, p_b, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_b, \mathbf{f}_b) = 0 \tag{61}$$
$$\mathcal{R}^{\mathrm{s}}(\theta_{i,b}, \mathbf{f}_b) = 0 \tag{62}$$
$$\mathcal{R}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_b, \boldsymbol{\phi}_b) = 0 \tag{63}$$
$$\mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_b) = 0 \tag{64}$$
$$\mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_b, \theta_{i,b}) = 0 \tag{65}$$

Pour résoudre ce système non-linéaire, on a recourt à une méthode de Newton puis à une discrétisation spatiale éléments finis.

5.1.1 Méthode de Newton

La méthode de Newton permet de résoudre un système d'équations non-linéaires de manière itérative, en se ramenant, à chaque itération, à la résolution d'un système linéaire. La procédure générale est la suivante : soit un système d'équations non-linéaires, qu'on écrit sous forme symbolique

$$\mathcal{R}(q) = 0 \tag{66}$$

Algorithm 1 Méthode de Newton

Initialize : $q = q_0$, $r = \mathrm{tol} + 1$
while $r \geq \mathrm{tol}$ **do**
  $\delta q = -\left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q}\Big|_q\right]^{-1} \mathcal{R}(q)$
  $q \leftarrow q + \delta q$
  $r = \|\mathcal{R}(q)\|_2$
end while

Dans notre cas, on pose donc, pour chaque itération k :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \delta\mathbf{u} \\
p_{k+1} &= p_k + \delta p \\
\theta_{i,k+1} &= \theta_{i,k} + \delta\theta_i \\
\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_{k+1} &= \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k + \delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} \\
\mathbf{f}_{k+1} &= \mathbf{f}_k + \delta\mathbf{f} \\
\boldsymbol{\phi}_{k+1} &= \boldsymbol{\phi}_k + \delta\boldsymbol{\phi}
\end{aligned}$$

Où les incréments sont solutions du système linéaire :

$$\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial[\mathbf{u},p]}\right|_{\mathbf{u}_k,p_k}(\delta\mathbf{u},\delta p)+\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k}\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}+\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial \mathbf{f}}\right|_{\mathbf{f}_k}\delta\mathbf{f}=-\mathcal{R}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u}_k,p_k,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k,\mathbf{f}_k) \tag{67}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_{i,k}}\delta\theta_i+\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \mathbf{f}}\right|_{\mathbf{f}_k}\delta\mathbf{f}=-\mathcal{R}^{\mathrm{s}}(\theta_{i,k},\mathbf{f}_k) \tag{68}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k}\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}+\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\phi}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_k}\delta\boldsymbol{\phi}=-\mathcal{R}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k,\boldsymbol{\phi}_k) \tag{69}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}_k}\delta\mathbf{u}=-\mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_k) \tag{70}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k}\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}+\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_{i,k}}\delta\theta_i=-\mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k,\theta_{i,k}) \tag{71}$$

Toutes les dérivées écrites ici sont à considérer au sens de *Gâteaux*. Par soucis de lisibilité, on détaille les calculs en annexe B.

5.1.2 Discrétisation éléments finis

La discrétisation spatiale du système (67)-(71) est réalisée par la méthode des éléments finis. On utilise le logiciel libre `Freefem++`, qui permet de générer les matrices et vecteurs correpondant à partir d'une formulation faible [Hecht, 2012]. On doit assurer pour $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}$ une régularité $\mathcal{H}^1$ et pour p, $\mathbf{f}$ et $\boldsymbol{\phi}$ une régularité $\mathcal{L}^2$. On choisit d'utiliser les éléments de Taylor-Hood $(\mathcal{P}^2,\mathcal{P}^1)$ pour les variables fluides classiques $(\mathbf{u},p)$ car ils respectent la condition *inf-sup* liée à l'équation de Navier-Stokes [Quarteroni, 2009]. La variable d'extension $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}$ est discretisée en éléments $\mathcal{P}^2$, et les multiplicateurs de Lagrange $\mathbf{f}$ et $\boldsymbol{\phi}$ par des éléments $\mathcal{P}^1$. Etant donné le vecteur regroupant toutes les inconnues discrétisées $\mathbf{q}=([\mathbf{u},p],\theta_i,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}},\mathbf{f},\boldsymbol{\phi})^T$, résoudre (67)-(71) revient à inverser le système matriciel :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_k)\delta\mathbf{q}=-\mathcal{R}(\mathbf{q}_k) \tag{72}$$

Avec

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_k)=\left.\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_k}=\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial[\mathbf{u},p]}\right|_{\mathbf{u}_k,p_k} & \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial \mathbf{f}}\right|_{\mathbf{f}_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_{i,k}} & \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \mathbf{f}}\right|_{\mathbf{f}_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k} & \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\phi}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_k} \\ \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}_k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_{i,k}} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}_k)=\begin{pmatrix} \mathcal{R}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u}_k,p_k,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k,\mathbf{f}_k) \\ \mathcal{R}^{\mathrm{s}}(\theta_{i,k},\mathbf{f}_k) \\ \mathcal{R}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k,\boldsymbol{\phi}_k) \\ \mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_k) \\ \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}{}_k,\theta_{i,k}) \end{pmatrix} \tag{74}$$

Si la donnée initiale $\mathbf{q}_0$ est suffisamment proche de la solution $\mathbf{q}_b$ de $\mathcal{R}(\mathbf{q}_b) = \mathbf{0}$, la séquence des $\{\mathbf{q}_k\}$ converge quadratiquement vers $\mathbf{q}_b$.

5.2 Perturbations

La deuxième étape de l'analyse de stabilité consiste à :

1. injecter dans les équations (56)-(60) une solution de la forme :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_b + \mathbf{q}' \tag{75}$$

   où $\mathbf{q}'$ est une *petite* perturbation, *i.e.* $\|\mathbf{q}'\|_2 \ll \|\mathbf{q}_b\|_2$.
2. soustraire l'équation de base $\mathcal{R}(\mathbf{q}_b) = \mathbf{0}$
3. garder uniquement les termes d'ordre $\mathcal{O}(\mathbf{q}')$

Ces trois étapes reviennent à dériver au sens de *Gâteaux* le système (56)-(60) autour de $\mathbf{q}_b$. La perturbation $\mathbf{q}'$ vérifie donc :

$$\left.\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_b} \mathbf{q}' + \left.\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_b} \mathbf{q}' = \mathbf{0} \tag{76}$$

Enfin, le système n'ayant aucune invariance géométrique, on considère des perturbations sous forme d'un mode de Fourier temporel : $\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) e^{(\lambda + i\omega)t}$. On transforme donc le système linéaire d'équations aux dérivées partielles instationnaires (76) en un problème aux valeurs propres polynomial (à cause de la présence de la dérivée temporelle seconde de θ_i'), où $\lambda + i\omega$ est valeur propre et $\hat{\mathbf{q}}$ le vecteur propre associé. Ainsi, λ *détermine la stabilité du système* : si $\lambda > 0$, les perturbations croissent exponentiellement en temps et le système est *instable* ; si $\lambda < 0$, elles sont exponentiellement amorties et le système est *stable*. Enfin, ω donne la pulsation du mode. Pour retrouver un problème aux valeurs propres généralisé classique, on ajoute au vecteur $\hat{\mathbf{q}}$ l'inconnue vitesse angulaire des plaques $\hat{\mathrm{v}}_{\theta_i} = (\lambda + i\omega)\hat{\theta}_i$, de sorte qu'on a :

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_b)\hat{\mathbf{q}} + (\lambda + i\omega)\mathbf{B}(\mathbf{q}_b)\hat{\mathbf{q}} = 0 \tag{77}$$

Toute la dérivation menant de (76) à (77) est détaillée en Annexe B. Le problème aux valeurs propres (77) est résolu à l'aide du solveur intégré au code `Freefem++`. Celui-ci est basé sur la bibliothèque de calcul `ARPACK` et utilise une méthode de type *Implicitly Restarted Arnoldi Method* [Lehoucq et al., 1997].

5.3 Un problème linéarisé forcé

Avant d'investiguer la stabilité linéaire du système on teste la réponse linéaire du système à un forçage, en l'occurrence ici, un mouvement des plaques prescrit. En pratique, cela revient à imposer une pulsation $0 + i\omega$ et une amplitude de déplacement des plaques $\hat{\theta}_i$ dans (77). Formellement, il suffit donc de remplacer la troisième ligne (l'équation solide) dans $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement par $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, puis d'introduire un terme de forçage $\boldsymbol{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\theta}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T$. Pour trouver la réponse linéaire $\tilde{\mathbf{q}}$ du système à un mouvement prescrit des plaques, il suffit alors d'inverser le système linéaire suivant :

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}_b) + i\omega\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}_b)\right)\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Upsilon} \tag{78}$$

où $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$ sont les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dont la deuxième ligne est modifiée comme expliqué ci-dessus.

6 Résultats autour des équations linéarisées

Dans cette partie, on présente différents résultats autour des équations du mouvement linéarisées. En section 6.2 on commence par étudier la stabilité de l'écoulement autour du culot seul, puis du culot équipé de plaques figées. Ensuite, en section 6.3, on présente quelques résultats numériques obtenus dans le cadre du problème linéarisé forcé (introduit en section 5.3). Enfin, en section 6.4, on s'intéresse à l'analyse de stabilité linéaire du système fluide-structure complet. On commence par une rapide validation des codes utilisés.

6.1 Validation

La validation des codes couplés fluide-structure développés ici est délicate de par la spécificité du modèle solide, qui est particulier à notre système d'étude. On a donc choisi de créer des codes *fluide seul* reposant sur les mêmes méthodes, et que l'on peut facilement valider sur des cas tests bien connus. Par la suite, on vérifie que, dans la limite d'une raideur infinie du ressort des plaques, on retrouve bien les solutions données par les codes fluides précédemment validés. Dans les deux paragraphes suivants on valide donc les codes *fluide seul* permettant d'obtenir le champs de base puis de faire l'analyse de stabilité.

6.1.1 Solution de base stationnaire

Pour valider le code permettant de trouver la solution de base, on utilise le benchmark proposé par [Turek and Schäfer, 1996] pour le cas d'un cylindre circulaire placé dans un canal. Pour ce problème purement fluide, on résout (11), en ayant adimmensionné par la vitesse débitante U_d et le diamètre du cylindre D. L'écoulement d'entrée est donné par le profil parabolique adimensionné :

$$U_{in} = 1.5\frac{y(H-y)}{(H/2)^2}\mathbf{e_x} \tag{79}$$

Le non-glissement est imposé sur les parois latérales, et la contrainte en sortie est nulle. On définit les différentes grandeurs à comparer au cas référence :

— le coefficient de traînée :

$$\mathcal{C}_D(\mathbf{u}_b, p_b) = 2\int_{\Gamma_0} \sigma(\mathbf{u}_b, p_b)\mathbf{n}^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{e_x} \qquad \text{(calculé à partir des champs } \mathbf{u}_b, p_b\text{)}$$

$$\mathcal{C}_D(\mathbf{f}_b) = 2\int_{\Gamma_0} \mathbf{f}_b \cdot \mathbf{e_x} \qquad \text{(calculé à partir du multiplicateur de Lagrange } \mathbf{f}_b\text{)}$$

— le coefficient de portance :

$$\mathcal{C}_L(\mathbf{u}_b, p_b) = 2\int_{\Gamma_0} \sigma(\mathbf{u}_b, p_b)\mathbf{n}^{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{e_y} \qquad \text{(calculé à partir des champs } \mathbf{u}_b, p_b\text{)}$$

$$\mathcal{C}_L(\mathbf{f}_b) = 2\int_{\Gamma_0} \mathbf{f}_b \cdot \mathbf{e_y} \qquad \text{(calculé à partir du multiplicateur de Lagrange } \mathbf{f}_b\text{)}$$

— le différentiel de pression entre l'amont et l'aval du cylindre : $\Delta p = p_b(B) - p_b(A)$

— la longueur de la zone de recirculation, notée L_r

On montre en figure 6 qu'on converge bien vers l'intervalle de valeurs de référence lorsque le nombre d'éléments sur le cylindre n_{cyl} augmente. On met par ailleurs en évidence la meilleure convergence en maillage obtenue lorsque le non-glissement sur Γ_0 est imposé de manière faible. On note que seules les grandeurs directement calculées à partir du multiplicateur de Lagrange $\mathbf{f}$ profitent d'une nette meilleure convergence.

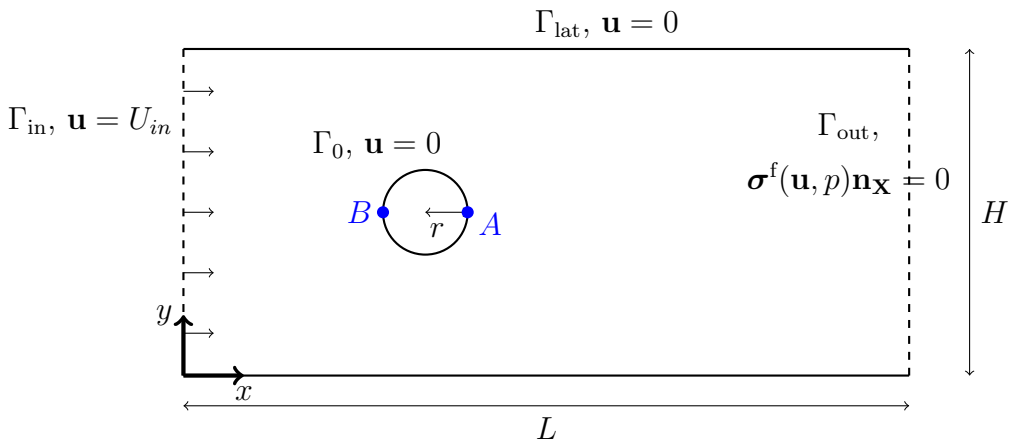


FIGURE 5 – ***Configuration du cas test de [Turek and Schäfer, 1996].***

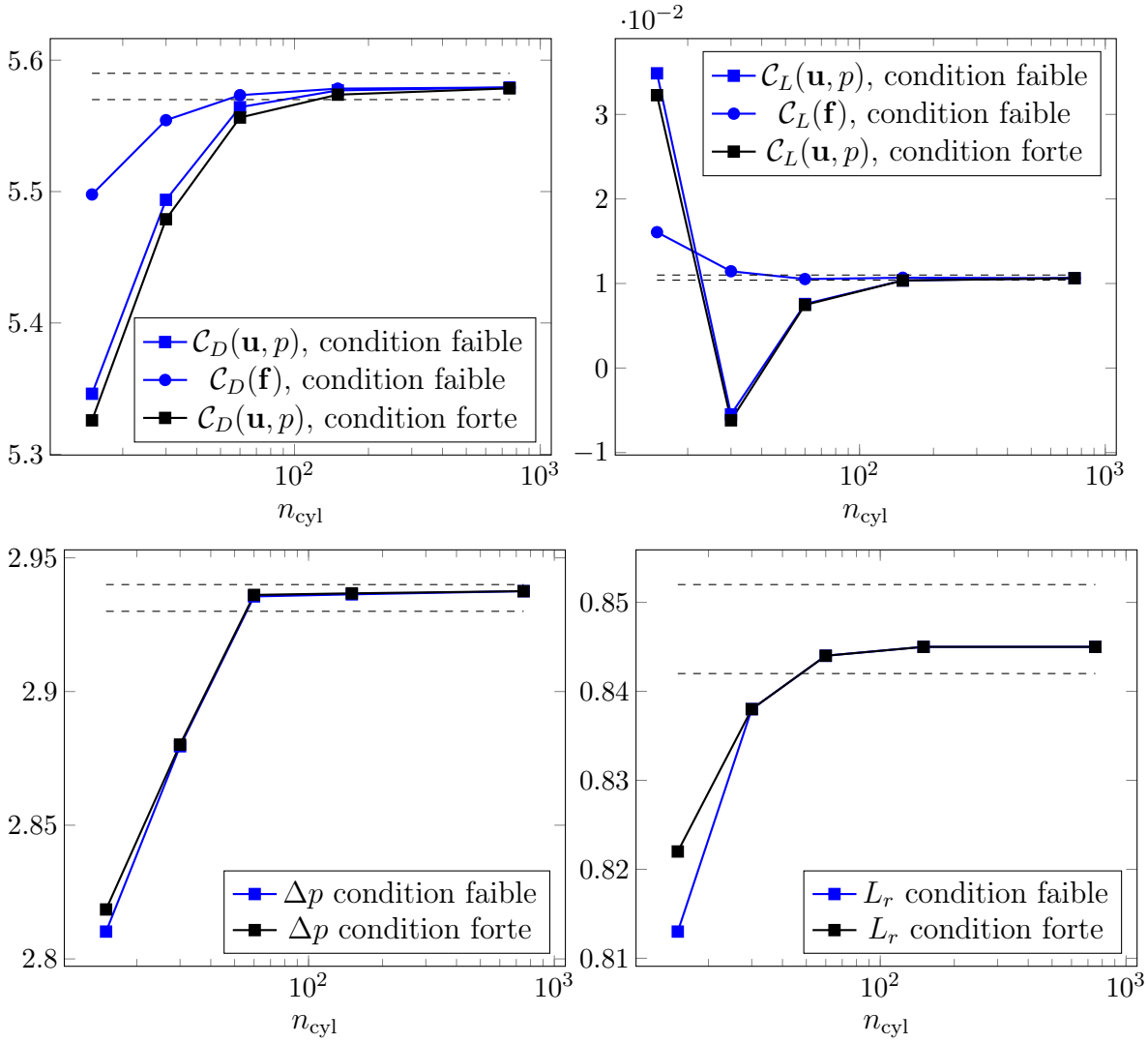


FIGURE 6 – ***Validation du code de calcul de la solution de base stationnaire. Les traits pointillés représentent les intervalles de valeurs de référence [Turek and Schäfer, 1996].***

6.1.2 Code de stabilité

Pour valider le code de stabilité, on compare nos résultats au cas du cylindre circulaire non confiné, largement étudié dans la littérature expérimentalement [Taneda, 1956] ou numériquement [Sreenivasan et al., 1987], [Barkley, 2006]). On obtient un Reynolds critique $\mathcal{R}e_c = 46.5$ qui correspond aux valeurs connues (voir Figure 7).

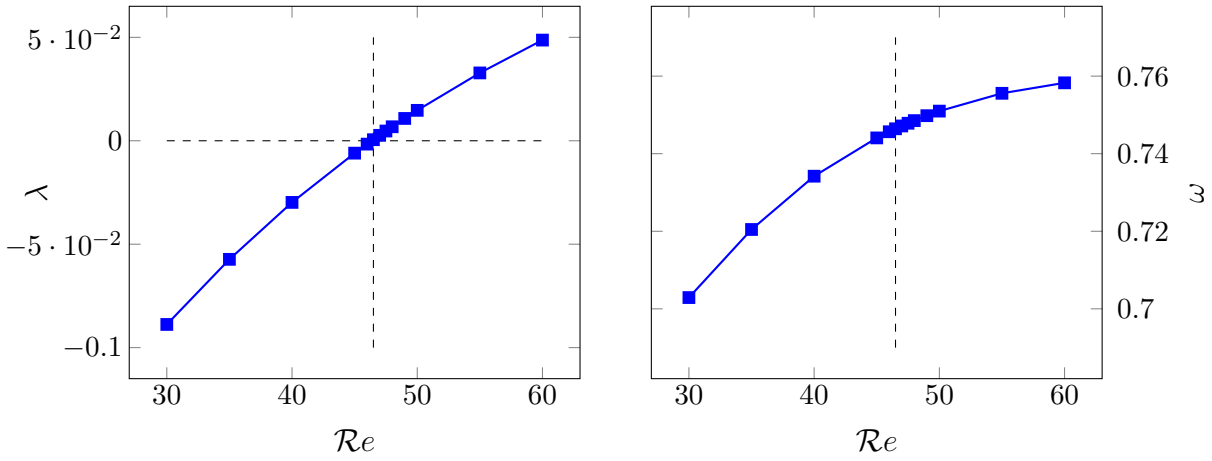


FIGURE 7 – ***Validation du code de stabilité linéaire pour le cas d'un cylindre circulaire non confiné. L'évolution du taux de croissance (à gauche) et de la pulsation (à droite) du mode le plus instable est présentée.***

6.2 Analyse de stabilité du système fluide seul

Le but de cette section est de présenter l'effet de l'ajout des deux plaques rigides sur la stabilité de l'écoulement de culot, dans le cas où elles restent *fixes*. Il s'agit donc d'un problème fluide seul. On présente d'abord brièvement le cas de référence du culot seul (sans plaques). Les dimensions du culot utilisé dans toute l'étude sont $D = 1$, $L = 5$.

6.2.1 Cas référence : culot seul

Dans le cas du culot seul, le calcul du champs de base montre un écoulement aux symétries bien définies en y : la vitesse axiale est paire en y alors que la vitesse verticale est impaire. Parmi les modes issus de l'analyse de stabilité linéaire, le plus instable est représenté en Figure 9. On y observe des symétries inverses à celles du champs de base. En progressant vers l'aval, on note dans le sillage du culot, un motif typique constitués de tourbillons régulièrement disposés de part et d'autre de l'axe x. Dans toute la suite, on qualifie ce mode de *mode de sillage*. A faible $\mathcal{R}e$, le taux d'accroissement λ associé au mode de sillage est négatif : le mode est stable. Lorsque $\mathcal{R}e$ augmente, λ augmente également jusqu'à devenir nul pour un Reynolds critique $\mathcal{R}e_c = 103.6$. Le mode de sillage est alors dit marginal et sa pulsation est $\omega_\mathrm{f} = 0.88$. Pour $\mathcal{R}e > \mathcal{R}e_c$, le taux d'accroissement est positif ; le mode de sillage est instable. Dans la réalité, non-linéaire, de l'écoulement (issue par exemple d'une simulation en temps classique), les deux zones $\mathcal{R}e < \mathcal{R}e_c$ et $\mathcal{R}e > \mathcal{R}e_c$ définies par l'analyse de stabilité linéaire se traduisent de la façon suivante. Pour $\mathcal{R}e < \mathcal{R}e_c$, l'écoulement réel est effectivement l'écoulement de base (stable) qu'on a calculé précédemment. Pour $\mathcal{R}e > \mathcal{R}e_c$, un écoulement instationnaire se met en place, avec apparition d'une allée de tourbillons, dite allée de Von-Karman. On peut alors noter que la topologie du mode linéaire de sillage, par lequel le système est devenu linéairement instable, ressemble fortement à la solution non-linéaire que constitue les allées de Von-Karman. Par

ailleurs, pour $\mathcal{R}e$ proche de $\mathcal{R}e_c$, la fréquence de lâcher des tourbillons de Von-Karman est proche de la fréquence $2\pi\omega_\mathrm{f}$ du mode de sillage. Evidemment, ceci n'est plus vrai quand $\mathcal{R}e$ continue à augmenter. Ceci s'explique par le fait que les effets non-linéaires, non pris en compte dans l'analyse de stabilité linéaire, sont alors prédominants et fixent la fréquence de lâcher des tourbillons.

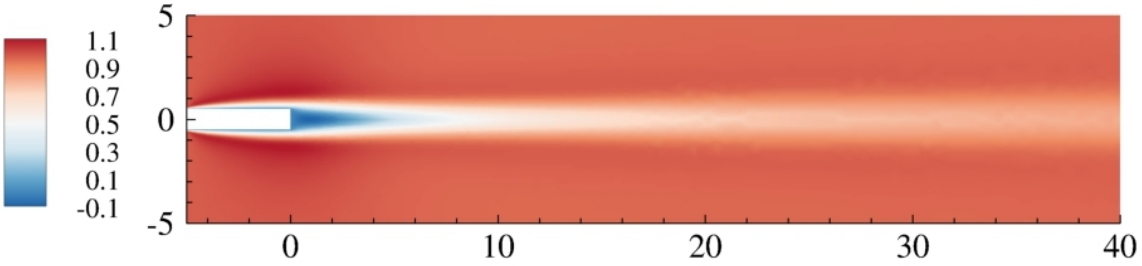


FIGURE 8 – ***Composante de vitesse axiale*** u_b ***de la solution de base pour le culot seul*** $\mathcal{R}e = 103.6$***..***

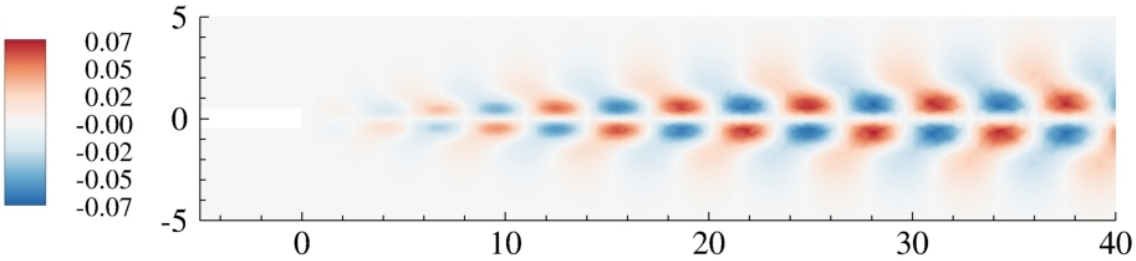


FIGURE 9 – ***Partie réelle de la vitesse axiale pour le mode de sillage du culot seul*** $\mathcal{R}e = 103.6$***..***

6.2.2 Effets de l'ajout de plaques rigides

L'ajout de plaques à l'arrière des corps non-profilés, afin d'entraver le lâcher tourbillonnaire est une technique bien connue en ingénierie ; elles sont généralement nommées *splitter plates* (plaques séparatrices) dans la littérature [Roshko, 1961], [Apelt and West, 1975]. Une interprétation qualitative possible en termes de symétries est que l'ajout de plaques séparatrices entrave la brisure de symétrie nécessaire à la déstabilisation.

L'analyse de stabilité linéaire confirme cette tendance pour des longueurs de plaque supérieure à un diamètre D. En revanche, pour $l < D$, l'effet des plaques est légèrement destabilisant. Par ailleurs, on met en évidence un effet significatif des plaques sur la fréquence du mode de sillage. Ici, pour une longueur de $3D$, on diminue la fréquence de 10%. Dans une perspective de contrôle d'écoulement, cela peut-être intéressant : si l'instabilité ne peut être supprimée, sa fréquence pourrait être décalée, permettant, par exemple, d'éviter que l'instabilité fluide n'ait lieu à une fréquence propre structurelle du corps non-profilé. Les effets de l'épaisseur de la plaque sont quant à eux très faibles, et ne sont pas présentés dans ce rapport. On gardera dans toute la suite une épaisseur constante des plaques : $d = 0.025$. Pour la longueur, on choisit de garder $l = 0.125$ (le cas le plus instable en Figure 10). Cette

longueur correspond donc à un Reynolds critique du système fluide (culot+plaques fixes) $\mathcal{R}e_{c,p} = 100.7 < \mathcal{R}e_c$.

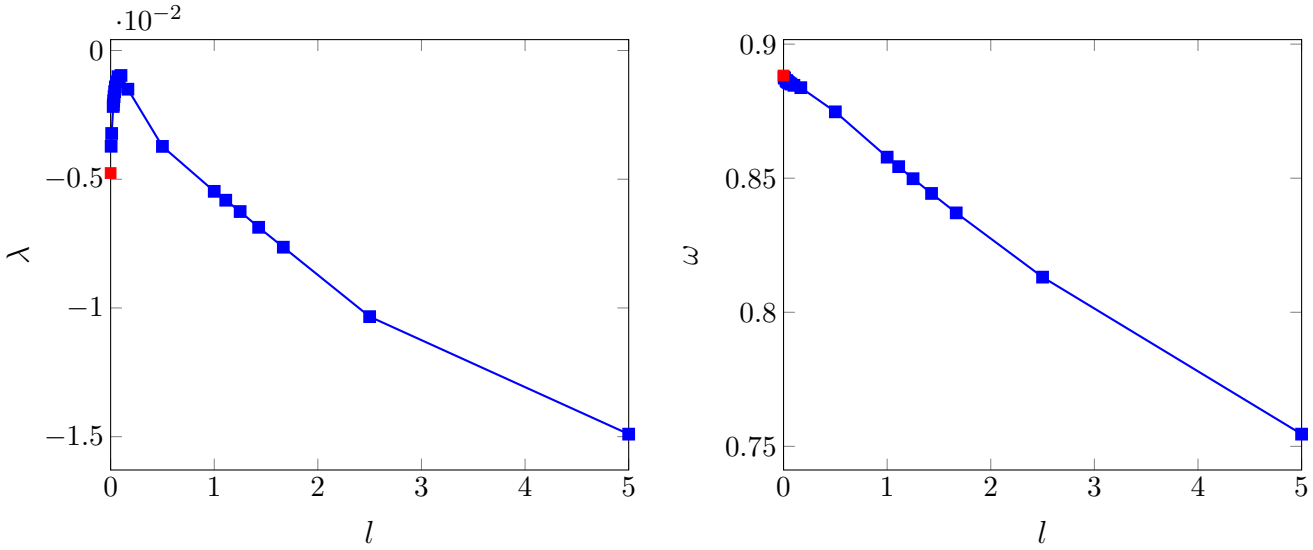


FIGURE 10 – ***Influence de la longueur des plaques sur la stabilité du système à*** $\mathcal{R}e = 100$***. Le carré rouge représente la valeur propre pour le culot seul.***

6.3 Analyse du problème fluide-structure linéaire forcé

On présente maintenant quelques résultats liés au problème fluide-structure linéaire forcé introduit en section 5.3. Ce problème simplifié permet (i) de discuter le problème fluide-structure complet (et pas uniquement fluide) en termes de symétries et surtout (ii) de mettre en lumière un problème technique survenu pendant ce stage qui pourrait être rencontré plus généralement dans le cadre d'investigations autour de problèmes fluide-structure linéarisés.

6.3.1 Considérations de symétrie et erreurs numériques

Pour un problème linéaire comme ceux envisagés dans ce travail, des relations de symétries simples s'appliquent entre les différentes quantités du problème. Pour cette discussion, nommons (S) les symétries observées sur le champs de base :

$$\begin{aligned} u_b(x,-y) &= u_b(x,y) \\ v_b(x,-y) &= -v_b(x,y) \\ p_b(x,-y) &= p_b(x,y) \end{aligned}$$

et (C) les symétries opposées. On peut montrer les deux propriétés suivantes (voir Annexe C) :

1. Pour le **problème forcé** (78) : si le forçage $\boldsymbol{\Upsilon}$ possède les symétries (S) ou (C), alors la solution $\tilde{\mathbf{q}}$ présente les mêmes symétries.
2. Pour le **problème de stabilité** (77) : les modes propres obtenus possèdent les symétries (S) *ou* (C).

Cependant, lors des premiers calculs, des solutions contredisant ces propriétés sont apparues. Pour illustrer ce phénomène, on observe les réponses linéaires obtenues pour des plaques aux coins *droits*. On exerce deux types de forçages :

— un forçage où les plaques sont actionnées en phase, noté $(+)$, et qui vérifie analytiquement les symétries (C).

— un forçage où les plaques sont actionnées en opposition de phase, noté $(-)$, et qui vérifie analytiquement les symétries (S).

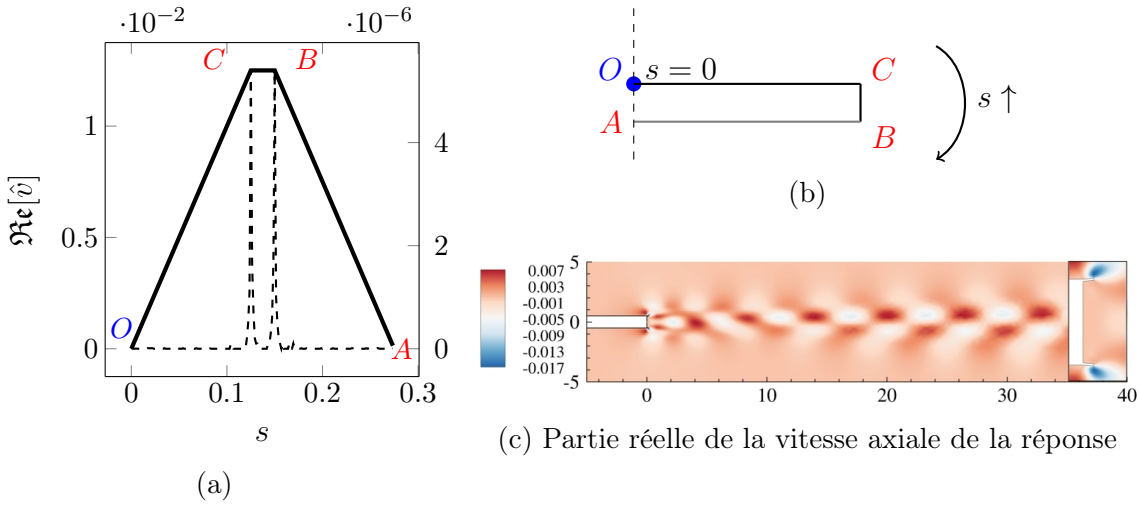
Ainsi, $(+)$ doit donner une réponse (C) et $(-)$ un réponse (S). En pratique, on obtient bien la symétrie (C) avec le forçage $(+)$. En revanche, la réponse au forçage $(-)$ ne possède pas les bonnes symétries (Figure 11c) : proche du culot, on respecte bien la symétrie (S) attendue, mais en aval, on a une transition vers la symétrie (C), ce qui est *théoriquement* impossible. L'origine du problème a été localisée dans les conditions limites de vitesse et déplacement sur l'interface fluide-structure $\Gamma_{\mathrm{p},i}$. En effet, alors qu'en théorie, la vitesse verticale imposée par le forçage $(-)$ doit être impaire en y, on constate que ce n'est numériquement pas le cas au niveau des plaques. On met cela en évidence en traçant $|v_{\mathrm{p},1} + v_{\mathrm{p},2}|$ le long des frontières $\Gamma_{\mathrm{p},1}$ et $\Gamma_{\mathrm{p},2}$ (Figure 11). On observe alors, aux coins des plaques une très léger écart à l'imparité théorique de la vitesse verticale. Cet écart est une conséquence de l'utilisation de la forme faible pour les conditions limites sur $\Gamma_{\mathrm{p},1}$ et $\Gamma_{\mathrm{p},2}$. En effet, la forme faible introduit les conditions limites de manière intégrale et n'assure donc pas que celles-ci soient respectées exactement. Cet écart à l'imparité théorique de la vitesse verticale, bien qu'infime (de l'ordre de 10^{-6}, soit 0.0001% de la vitesse verticale maximale sur la plaque), est la source du changement de symétries observé en Figure 11c vers l'aval du culot. En effet, à cause de ce petit écart, une partie du forçage $(-)$ ne respecte pas la symétrie (S). Le forçage réel peut donc être décomposé en la somme du forçage théorique $\boldsymbol{\Upsilon}$ de symétrie (S) et d'un forçage numérique $\boldsymbol{\Upsilon}_{\mathrm{num}}$ de symétrie (C). C'est ensuite la physique du système qui entre en jeu et amplifie spatialement $\boldsymbol{\Upsilon}_{\mathrm{num}}$, malgré sa faible amplitude, jusqu'à le rendre prédominant pour x suffisamment grand.

Deux solutions sont proposées pour remédier à ce problème :

1. utiliser des conditions limites sous forme forte sur $\Gamma_{\mathrm{p},i}$
2. arrondir les bords des plaques

La solution (1) à l'avantage de permettre de travailler avec n'importe quelle géométrie puisque qu'une fois sous forme forte, la condition limite est exactement respectée (et donc les propriétés de symétrie aussi). Néanmoins, on perd les propriétés de convergences en maillage particulières aux conditions faibles. L'idée de la solution (2) vient de la localisation de la dissymétrie aux coins des plaques. L'arrondissement des coins augmente la régularité de la frontière et permet ainsi aux conditions limites d'y être imposées plus précisément. La solution (2) permet de conserver les bénéfices liées à la formulation faibles ; nous utilisons donc dans toute la suite des plaques aux coins arrondis.

Notons, d'un point de vue physique, que cette extrême sensibilité de l'écoulement à de très légères erreurs numériques traduit à la fois (i) la nature d'*amplificateur de bruit* de



(c) Partie réelle de la vitesse axiale de la réponse

FIGURE 11 – ***Effet d'une légère dissymétrie des conditions limites de vitesse verticale entre*** $\Gamma_{p,1}$ ***et*** $\Gamma_{p,2}$ ***pour le forçage*** $(-)$***. La vitesse théorique donnée par*** (17) ***est représentée en trait plein pour la plaque*** 1 ***(11a). Etant donnée la définition du mode*** $(-)$***, la vitesse verticale sur la plaque 2 doit être opposée. Pour le vérifier, on trace*** $|v_{p,1} + v_{p,2}|$ ***en pointillés. Cette grandeur devrait être nulle partout. Sinon, le forçage*** $(-)$ ***n'a pas numériquement la symétrie supposée (11c).***

l'écoulement [Huerre and Monkevitz, 1990], (ii) la sensibilité particulière de l'écoulement dans la région où sont situées les plaques et (iii) encourage les tentatives de contrôle en agissant dans cette région.

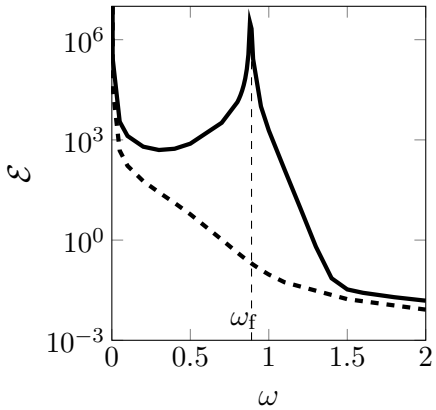
6.3.2 Physique du problème linéaire forcé

Si on s'est d'abord intéressé au problème forcé (78) pour comprendre les incohérences de symétries détaillées au paragraphe précédant, on peut également en tirer quelques interprétations physiques sur les résonances du système étudié. Considérons donc les forçages $(+)$ et $(-)$ présentés au paragraphe 6.3.1, et faisons varier leur fréquence. On peut intuitivement s'attendre à trouver dans chaque cas une résonance lorsque $\omega \to \omega_{\mathrm{f}}$: le système fluide serait alors excité à sa fréquence propre ω_{f}. En Figure 12, on présente l'évolution du ratio entre l'énergie cinétique totale du fluide et l'énergie cinétique du forçage défini par :

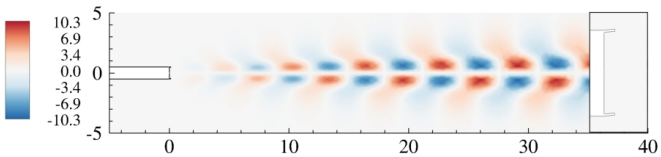
$$\mathcal{E} = \frac{\int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \hat{\mathbf{u}}^{\star}\hat{\mathbf{u}}}{\hat{\mathrm{v}}_{\theta_i}^2} \tag{80}$$

On remarque que le mode $(+)$ présente effectivement une résonance avec les fluide pour $\omega \simeq \omega_{\mathrm{f}}$. Le mode $(-)$, en revanche, n'est pas affecté. On observe donc que, dans le cadre d'un forçage linéaire, la fréquence n'est pas le seul paramètre conditionnant la résonance. Il faut également que les symétries du forçage soient opposées aux symétries du champs de base. On pourrait donc parler de *résonance en fréquence* et de *résonance en symétrie*.

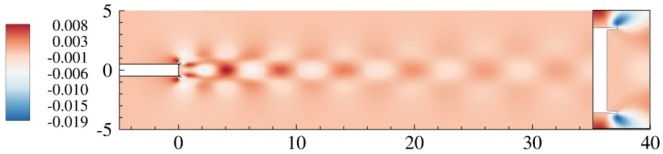
Note : notons que $\mathcal{E} \to \infty$ en $\omega = 0$ n'est pas une résonance. Cette évolution n'est liée qu'au fait que le dénominateur de $\mathcal{E} \to 0$ alors que le numérateur non : même à fréquence nulle le forçage $\boldsymbol{\Upsilon}$ n'est pas nul (dès lors que $\hat{\theta}_i \neq 0$), la réponse non plus.



(a) Energie $\mathcal{E}$ de la réponse linéaire pour un forçage de type (+) (trait plein) ou (−) (trait pointillé)



(b) Partie réelle de la vitesse axiale (forçage (+), $\omega_0 = 0.89$)



(c) Partie réelle de la vitesse axiale (forçage (−), $\omega_0 = 0.89$)

FIGURE 12 – ***Réponse linéaire dans les cas de plaques avec coins arrondis et une condition limite de vitesse sur $\Gamma_{p,i}$ sous forme faible.***

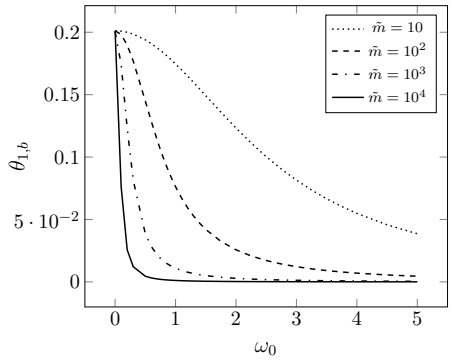
6.4 Analyse de stabilité du système fluide-structure

6.4.1 Variations de l'état de base

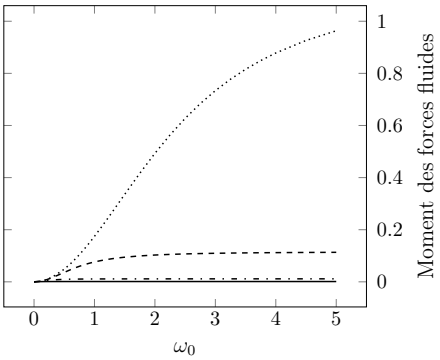
On investigue ici le problème de stabilité couplé fluide-structure (équation (77)). Une particularité du système réside dans le fait que l'état de base n'est pas constant lorsque les paramètres $\tilde{m}$ et ω_0 varient. En figures 13a et 13b, on observe l'évolution de l'angle $\theta_{1,b}$ et du moment des forces fluides appliquées sur la plaque 1 en fonction de ω_0 pour différents rapports de masses. On constate que l'angle $\theta_{1,b}$, comme le moment des forces fluides sont positifs. Ceci indique que la plaque 1 est déviée vers l'extérieur. Par symétrie, la plaque 2 est également déviée vers l'extérieur ($\theta_{2,b} = -\theta_{1,b}$). Cette déviation est due à la présence d'une dépression sur le côté externe des plaques, comme illustré en Figure 13c. Lorsque $\tilde{m}$ décroit, les efforts fluides deviennent de plus en plus importants, ce qui augmente les angles atteints par les plaques. Notons néanmoins que la limite $\omega_0 = 0$ est commune pour tous les $\tilde{m}$. En effet, dans le cas $\omega_0 = 0$, l'équation (29), régissant les mouvements des plaques, équivaut simplement à annuler le moment des forces fluides (ce qui est indépendant de $\tilde{m}$).

Du point de vue de l'analyse de stabilité, les variations des paramètres $(\mathcal{R}e, \tilde{m}, \omega_0)$ vont donc influencer les résultats par deux biais : (i) modifications du champs de base et (ii) modifications intrinsèques du problème linéarisé (77). D'un point de vue pratique, l'inconvénient est qu'un champs de base doit être recalculé pour chaque triplet ($\mathcal{R}e$, $\tilde{m}$,ω_0), augmentant ainsi considérablement le temps de calcul pour réaliser des études paramétriques. Ainsi, pour éviter l'entremêlement des effets (i) et (ii) et pour accélérer les calculs, on peut choisir, dans un premier temps, de prendre l'état de base non-déformé *i.e.* $\theta_{i,b} = 0$. Cela revient à ajouter un moment statique dans l'équation (29) qui assurera $\theta_{i,b} = 0$, mais pour autant, n'intervient pas dans le problème aux valeurs propres (77). Expérimentalement cela correspond à décaler le zéro du ressort de torsion de sorte à garder les plaques parallèles quelques soient les paramètres choisis. Dans la suite, on utilise cette simplification

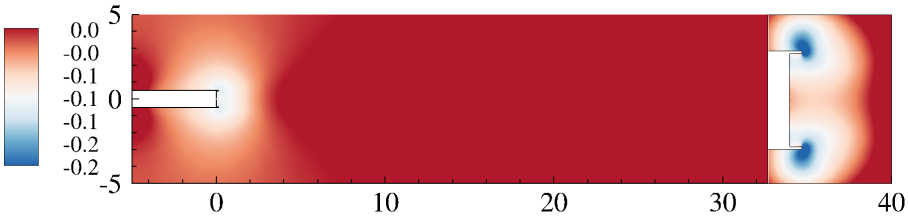
dans une première partie avant de prendre en compte les modifications du champs de base dans une seconde partie.



(a) Evolution de $\theta_{1,b}$ en fonction de ω_0 pour différents rapports de masse



(b) Evolution du moment des forces fluides sur la plaque 1 en fonction de ω_0 pour différents rapports de masse



(c) Champs de pression ($\tilde{m} = 10^4$, $\omega_0 = 5$)

FIGURE 13 – ***Solution de base à*** $\mathcal{R}e = 100$.

6.4.2 Champs de base non-déformé

Dans toute cette partie on considère l'analyse de stabilité sur un champs de base non-déformé.

Commençons par présenter en Figure 14a, un spectre typique du système fluide-structure dans la limite $\omega_0 \to \infty$ et $\tilde{m} \to \infty$. On identifie trois modes. Le premier (point bleu) présente une distribution spatiale (Figure 14b) rappelant le mode de sillage présenté en Figure 9. De plus sa pulsation est proche de ω_f. On dira donc dans la suite qu'il s'agit d'un mode fluide, noté FM (*Fluid Mode*). Les deux autres modes (points rouge et noir) présentent une structure spatiale localisée autour des plaques (Figures 14c et 14d), ainsi qu'une pulsation proche de la pulsation propre des plaques ω_0. Par conséquent, on dira qu'il s'agit de modes solides, notés SM (*Solid Mode*). Ces deux modes solides se distinguent par leurs symétries spatiales. L'un (point rouge) possède les symétries opposées à celles du champs de base ; les plaques oscillent en phase. L'autre (point noir) possède les symétries du champs de base ; les plaques oscillent en opposition de phase. Dans la suite, le signe (+)(resp. (-)) dans la dénomination d'un mode signifie que ce mode possède les symétries opposées au champs de base (resp. du champs de base).

On veut maintenant étudier l'évolution du spectre en fonction des différents paramètres du système $(\mathcal{R}e, \tilde{m}, \omega_0)$. Si on a pu faire une distinction claire entre mode fluide et modes solides dans le cas de la Figure 14a, il n'est pas garanti que cette distinction soit toujours

possible, quelques soient les paramètres choisis. Pour gérer cette difficulté, on adopte une vision de type continuation : on suit la trajectoire des modes dans le plan complexe depuis la double limite $\omega_0 \to \infty$ et $\tilde{m} \to \infty$. En effet, dans la limite $\omega_0 \to \infty$ (qu'on peut atteindre physiquement pour une raideur K infinie), les plaques ne peuvent pas bouger. Le mode s'apparentant à un mode de sillage dans cette limite est donc un mode fluide FM . Pour définir un mode solide SM , on utilise plutôt la limite $\tilde{m} \to \infty$. En effet, dans cette limite, l'équation solide n'est plus forcée par le terme de forces fluides, et on doit retrouver dans le spectre deux modes de taux de croissance nul et de pulsation $\omega = \omega_0$.

Note 1 : la limite $\omega_0 \to \infty$ n'est pas un cas de référence idéal pour les modes solides car cette limite peut dépendre de $\tilde{m}$ par des effets de type masse, amortissement ou raideur ajoutée.

Note 2 : Aux paramètres présentés en Figure 14, les limites $\omega_0 \to \infty$ et $\tilde{m} \to \infty$ étaient toutes deux atteintes. D'où la distinction facile entre les modes.

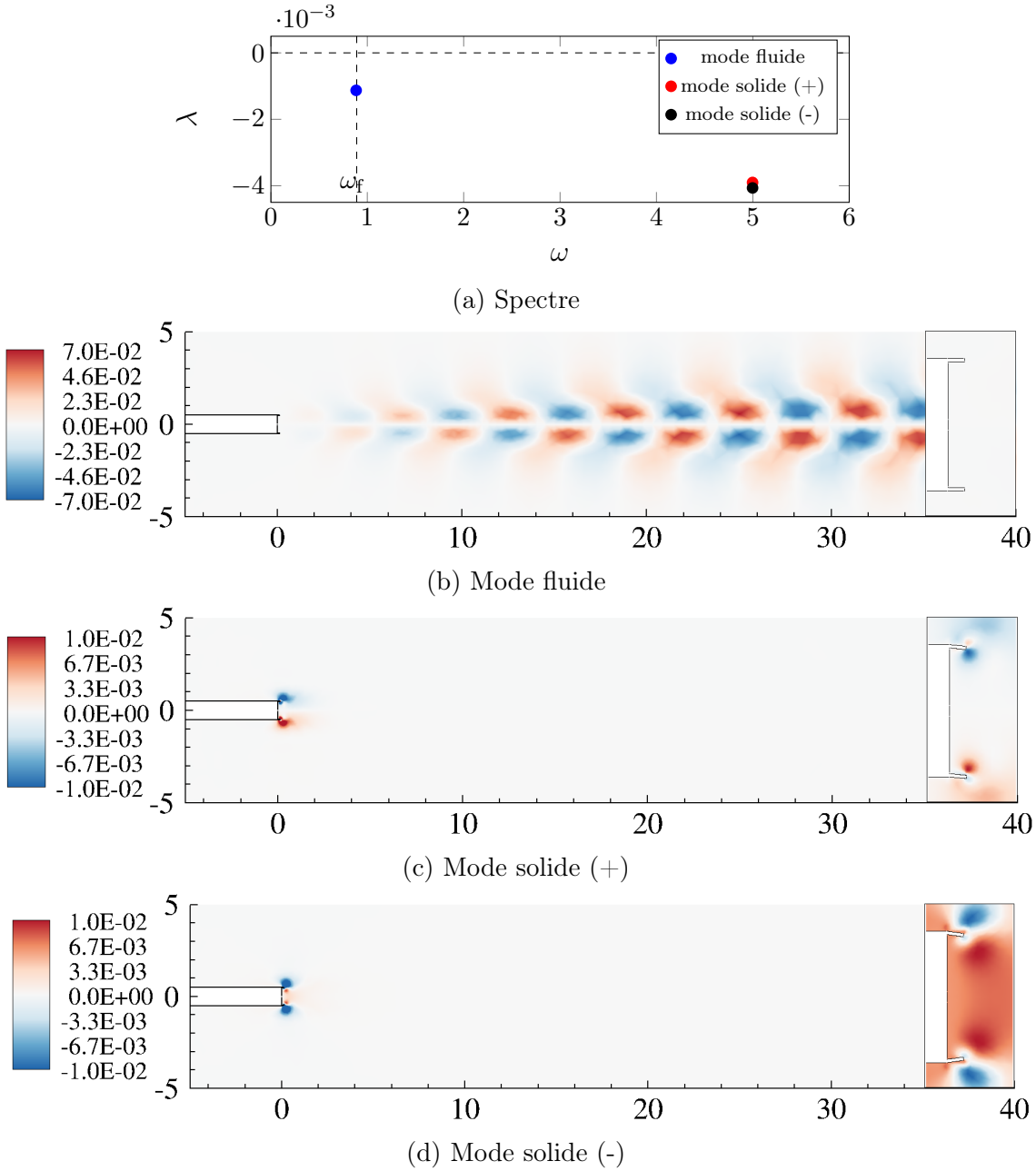


FIGURE 14 – ***Spectre du système fluide-structure et structure spatiale des modes normaux (partie réelle de la vitesse axiale) pour*** $(\mathcal{R}e = 100, \tilde{m} = 10^4, \omega_0 = 5)$***.***

Etudes paramétriques : cas $\tilde{m}$ grand

On veut maintenant étudier l'effet de ω_0 et $\mathcal{R}e$. On commence par le cas où $\tilde{m}$ est grand : le solide est alors beaucoup plus dense que le fluide. C'est un cas typiquement rencontré en aéroélasticité. Pour $\tilde{m} = 10^4$ fixé, deux situations peuvent apparaitre lorsqu'on fait varier la fréquence propre des plaques ω_0 :

— Situation 1, *découplage* (Figures 15 et 17) : on distingue clairement un mode fluide FM évoluant sur une trajectoire elliptique ouverte et deux modes solides SM(+) et SM(-) dont la fréquence suit ω_0 avec des faibles niveaux d'amortissement. En Figure 19, on voit bien que, lorsque ω_0 varie, FM garde un pulsation constante, proche de ω_f alors que SM(+) et SM(-) ont une pulsation proche de ω_0. Par ailleurs, le mode SM(+) possède des symétries spatiales opposées au champs de base et le mode SM(-) les symétries du champs de base.

— Situation 2, *couplage* (Figure 16) : si on peut toujours observer une branche SM(-) (noire), on ne peut plus distinguer clairement une branche fluide d'une branche solide SM(+) . A la place, on observe que les branches bleue et rouge peuvent s'inscrire dans la continuité l'une de l'autre : la branche bleue s'arrête où la branche rouge commence. Plus précisemment, on comprend en Figure 19 que les branches bleue et rouge échangent leurs natures lorsque ω_0 varie. En effet, à grand ω_0, la branche bleu "joue le rôle" de branche fluide (sa pulsation est proche de ω_f), alors qu'à faible ω_0, elle "joue le rôle" de branche solide (sa pulsation est proche de ω_0). De la même manière, à grand ω_0, la branche rouge "joue le rôle" de branche solide, alors qu'à faible ω_0, elle "joue le rôle" de branche fluide. Dans la suite, on adopte le sigle proposé par [Navrose and Mittal, 2016] en nommant la branche bleue FSM1 (*Fluid-Solid Mode 1*) et la branche rouge FSM2 (*Fluid-Solid Mode 2*). Par ailleurs, FSM1 et FSM2 possèdent les symétries opposées au champs de base alors que SM(-) a les symétries du champs de base.

Comme on peut le remarquer dans les Figures 15,16 et 17, la situation observée dépend de $\mathcal{R}e$. Si $\mathcal{R}e$ est loin du Reynolds critique pour le système fluide seul (plaques figées) $\mathcal{R}e_{c,p}$, c'est la situation 1 qui est observée. En effet, le mode fluide FM possède alors un taux de croissance trop éloigné de celui de SM(+) pour qu'il y ait couplage. En revanche, lorsque $\mathcal{R}e$ est proche de $\mathcal{R}e_{c,p}$, on observe la situation 2. Par ailleurs, la taille de la zone de couplage (en terme de $\mathcal{R}e$) dépend de $\tilde{m}$. On note que ces deux situations on récemment été mise en évidence dans le cas classique d'un cylindre monté sur un ressort par [Navrose and Mittal, 2016].

Quelque soit le trajet des modes dans le plan complexe (situation 1 ou 2), on constate à chaque fois que les taux de croissance subissent de fortes variations dès lors que les fréquences de deux modes sont identiques (voir Figures 18 et 19). On dira qu'il s'agit d'un phénomène de *résonance* entre modes. Dans la situation 1 (Figure 19), les modes FM et SM(+) entrent en résonance menant à la déstabilisation de FM et à la stabilisation de SM(+) . Dans la situation 2 (Figure 18), ce sont les modes FSM1 et FSM2 qui interagissent, menant à la déstabilisation de FSM1 et à la stabilisation de FSM2 . On peut caractériser plus précisemment cette résonance grâce à la distribution spatiale du mode le plus instable (Figure 20). Il s'agit en effet d'un mode de type sillage (voir section 6.2.1), indiquant que la résonance observée implique la fréquence typique du lâcher tourbillonnaire. Physiquement, le fluide excite la structure à une fréquence proche de sa fréquence de résonance. La réponse de la structure excite le fluide à ω_f. Le couplage entre ces deux excitations déclenche l'instabilité. Il s'agit d'une instabilité typique de VIV [Williamson and Govardhan, 2004]. Par ailleurs, dans la limite $\omega_0 \to \infty$, on retrouve, comme attendu, la stabilité du système fluide seul (culot+plaques figées). Enfin, alors qu'on pourrait s'attendre à obtenir un système moins stable dans la limite $\omega_0 = 0$, on observe en réalité que le mode le plus instable possède un taux de croissance très proche du cas $\omega_0 \to \infty$, et même légèrement plus stable.

Enfin, pour des pulsations propres très légèrement inférieures à la pulsation de résonance, on observe une légère stabilisation du système (Figures 18 et 19). Dans la suite, on fait référence à cette zone par le terme d'*anti-résonance*. Si l'amplitude de cette stabilisation est faible, on verra en section 6.4.4 qu'on peut l'accroitre par un choix adéquat de $\tilde{m}$.

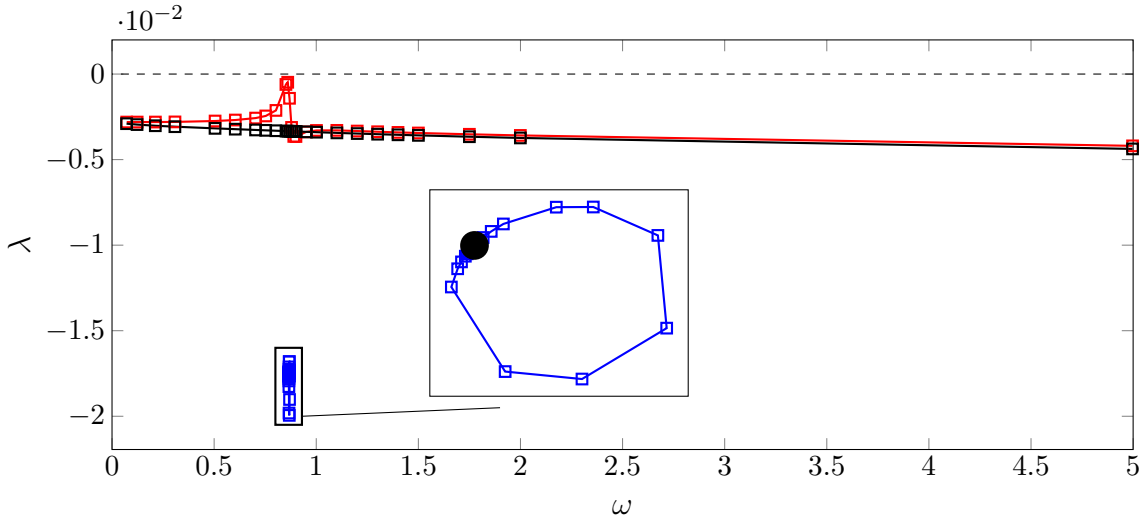


FIGURE 15 – ***Trajet des modes FM (bleu), SM(+) (rouge) et SM(-) (noir) dans le plan complexe pour $\mathcal{R}e = 90$, $\tilde{m} = 10^4$ et $\omega_0 \in [0, 5]$. Le point noir signale la position du mode de sillage pour le système fluide seul (i.e. plaques figées). On distingue clairement une branche elliptique pour FM et une branche pour SM(+) .***

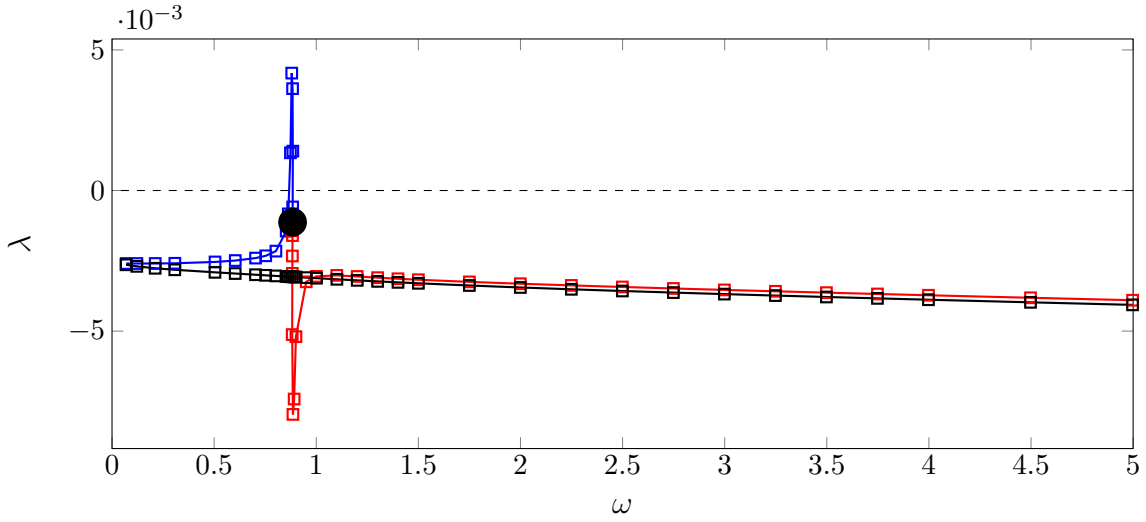


FIGURE 16 – ***Trajet des modes FSM1 (bleu), FSM2 (rouge) et SM(-) (noir) dans le plan complexe pour $\mathcal{R}e = 100$, $\tilde{m} = 10^4$ et $\omega_0 \in [0, 5]$. Le point noir signale la position du mode de sillage pour le système fluide seul (i.e. plaques figées). Les deux modes FSM1 et FSM2 évoluent sur une seule trajectoire.***

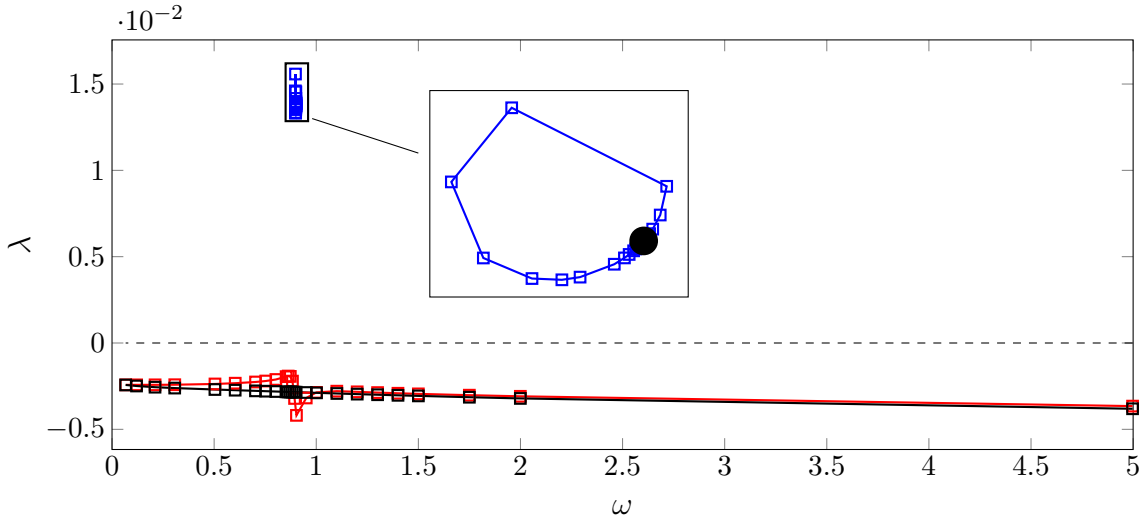


FIGURE 17 – ***Trajet des modes FM (bleu), SM(+) (rouge) et SM(-) (noir) dans le plan complexe pour*** $\mathcal{R}e = 110$, $\tilde{m} = 10^4$ ***et*** $\omega_0 \in [0, 5]$. ***Le point noir signale la position du mode de sillage pour le système fluide seul (i.e. plaques figées). On distingue clairement une branche elliptique pour FM et une branche pour SM(+) .***

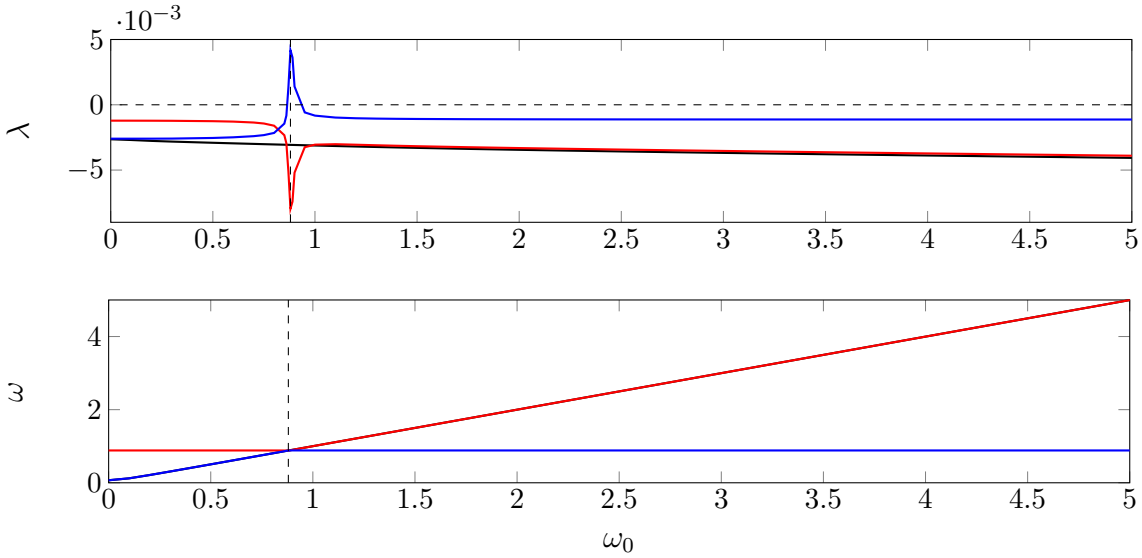


FIGURE 18 – ***Evolution de*** λ ***et*** ω ***pour les modes FSM1 (bleu), FSM2 (rouge) et SM(-) (noir) en fonction de*** ω_0. ($\mathcal{R}e = 100$, $\tilde{m} = 10^4$).

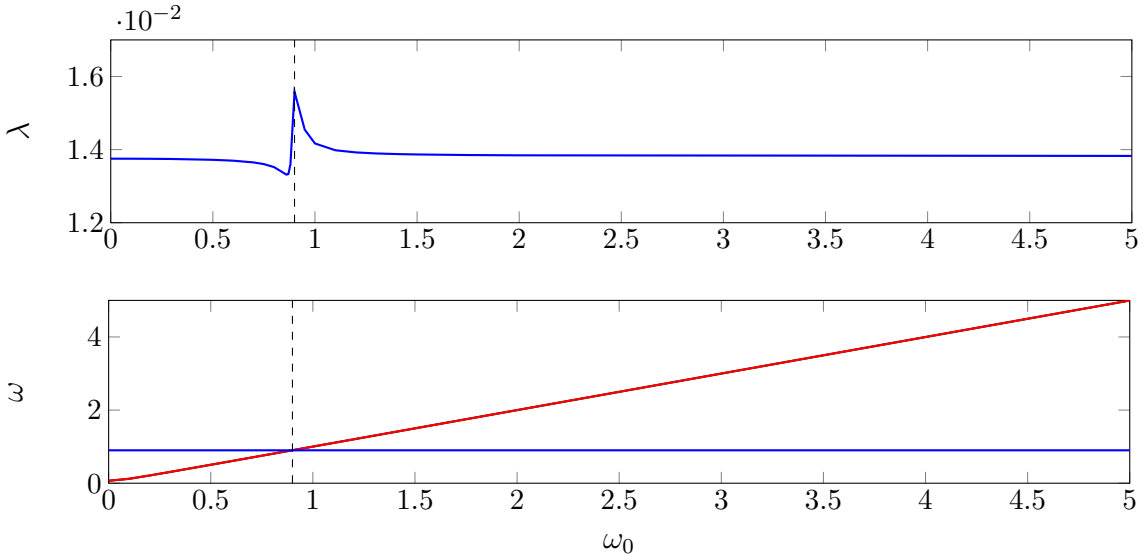


FIGURE 19 – ***Evolution de λ et ω pour les modes FM (bleu), SM(+) (rouge) et SM(-) (noir) en fonction de ω_0. ($\mathcal{R}e = 110$, $\tilde{m} = 10^4$).***

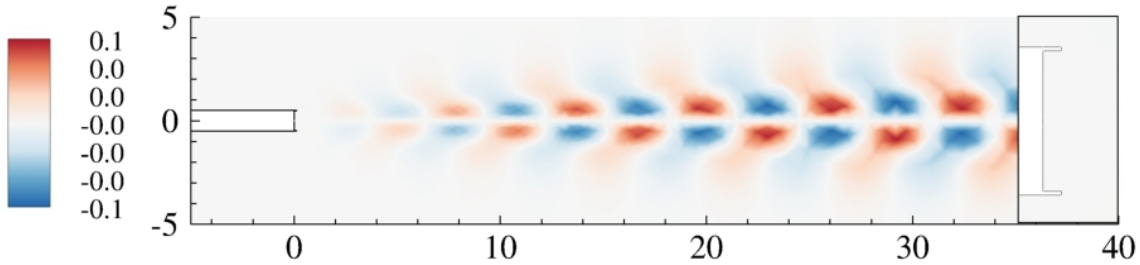


FIGURE 20 – ***Mode le plus instable (partie réelle de la vitesse axiale) pour $\omega_0 = 0.88$, $\mathcal{R}e = 100$, $\tilde{m} = 10^4$.***

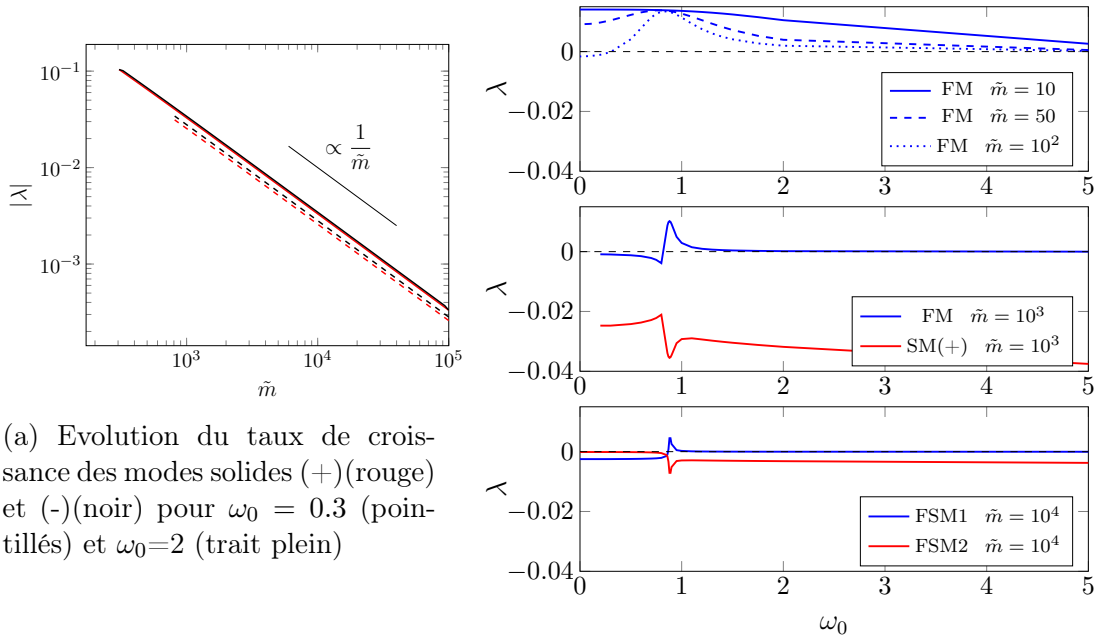
Effet de $\tilde{m}$ Afin de compléter l'étude paramétrique, on considère maintenant des variations du rapport de masse $\tilde{m}$. En Figure 21, on suit les modes solides (+) et (−) depuis la limite $\tilde{m} \to \infty$ jusqu'à des faibles rapports de masse. On remarque une évolution caractéristique du taux de croissance en $1/\tilde{m}$, qu'on peut relier à un effet de type amortissement ajouté. En effet, supposons comme dans [Hémon, 2006] que, proche de la position d'équilibre autour de laquelle on linéarise les équations du mouvement, on peut écrire que les efforts fluides exercés sur les plaques sont proportionnels à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Le moment des forces fluides dans l'équation (29) est alors remplacé par $c_a/(\tilde{m}\chi)\dot{\theta}$ où $c_a > 0$ est un coefficient de proportionnalité. L'équation (29) devient donc une équation d'oscillateur amorti :

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + \frac{1}{\tilde{m}\chi} c_a \frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega_0^2 \theta_i = 0 \tag{81}$$

Les solutions de cette équation sont amorties en temps avec un taux d'amortissement $c_a/(2\tilde{m}\chi)$, variant donc comme $1/\tilde{m}$. On a pu vérifier que cette tendance en $1/\tilde{m}$ est va-

lable pour tout ω_0, de sorte que, si on diminue le rapport de masse à $\mathcal{R}e$ fixé, le branche rouge se décale dans le spectre vers des taux de croissance de plus en plus négatifs (Figure 21, colonne de droite). On retrouve alors les situations 1 ou 2 décrites dans le paragraphe précédent, selon que la branche rouge a un taux de croissance plus ou moins éloigné de celui de la branche bleue. Dans le cas de la Figure 21, on est en situation 1, *découplage*, pour $\tilde{m} = 10, 50, 10^2, 10^3$ et en situation 2, *couplage*, pour $\tilde{m} = 10^4$.

Indépendamment de la situation rencontrée (type 1 ou 2), on remarque que lorsque $\tilde{m}$ diminue, l'intervalle de ω_0 sur lequel l'instabilité VIV a lieu s'élargit. De plus, la valeur de λ à la résonance augmente. Notons qu'à $\tilde{m} = 10$, le pic de résonance est si large que la limite $\omega_0 = 0$ est aussi instable que $\omega_0 \simeq \omega_\mathrm{f}$. Ces observations vont dans le sens intuitif d'un accroissement de l'intensité des phénomènes fluide-structure lorsque que le rapport de masse diminue. En revanche, elles montrent aussi que les faibles $\tilde{m}$ n'engendrent pas forcément une situation de type *couplage*. Autrement dit, un fort couplage au sens traditionnel de l'interaction fluide structure (*i.e.* faibles rapports de masse) ne s'accompagne pas forcément, dans les spectres, d'une situation de type *couplage*. En ce sens, notre système diffère du cylindre oscillant étudié par [Navrose and Mittal, 2016], pour lequel une situation de type *couplage* était toujours observée à faible $\tilde{m}$.



(a) Evolution du taux de croissance des modes solides (+)(rouge) et (-)(noir) pour $\omega_0 = 0.3$ (pointillés) et ω_0=2 (trait plein)

FIGURE 21 – ***Effet du rapport de masse sur le spectre du système couplé*** *($\mathcal{R}e = \mathcal{R}e_{c,p} = 100.7$)* **.**

6.4.3 Champs de base déformé

Dans cette section, on prend en compte les variations de la solution de base en fonction de différents paramètres du système. La Figure 22 montre que, lorsque que la solution de base est déformée, on observe deux zones d'instabilité. La première zone, obtenue pour $\omega_0 \simeq \omega_\mathrm{f}$, est très semblable aux résultats de la section précédente. C'est le phénomène de

résonance mis en évidence en section 6.4.2. La deuxième zone, obtenue pour ω_0 petit, n'était pas présente auparavant. Dans ces deux zones, le mode instable oscille à une pulsation proche de ω_f.

Si on a déjà caractérisé l'instabilité de type résonance dans la section précédente, on veut maintenant comprendre l'apparition de la seconde zone d'instabilité, aux faibles ω_0. A cette fin, on présente également en Figure 22 les courbes correspondant à (i) l'analyse de stabilité sur champs de base non-déformé (traits fins), ainsi qu'à (ii) l'analyse de stabilité du système - fluide uniquement - où les plaques sont figées dans la configuration de base déformée. D'une part, on observe comme attendu que, lorsque ω_0 augmente, les résultats pour un champs de base déformé ou non convergent l'un vers l'autre. En effet, la déformation du champs de base diminue lorsque ω_0 augmente (voir Figure 13a). D'autre part, pour ω_0 suffisamment petit, on remarque que l'évolution du mode instable FSM2 , donné par l'analyse sur champs de base déformé, est parfaitement retrouvée par l'analyse du système fluide, où les plaques sont figées dans la configuration déformée. L'instabilité observée à faible ω_0 correspond donc simplement à une géométrie plus instable du point vue du fluide, car "moins profilée". Elle n'est due qu'à la déformation du champs de base. Aucun phénomène d'interaction fluide-structure n'est à l'origine de cette nouvelle zone d'instabilité.

Dans le cas présenté en Figure 22, le rapport de masse est élevé, de sorte que la déformation de la solution de base n'est significative que pour $\omega_0 \lesssim 0.3$ (voir Figure 13). En conséquence, la zone d'instabilité liée à la déformation du champs de base reste limitée à $\omega_0 \lesssim 0.3$. Si le rapport de masse diminue, cette zone s'étend vers les grands ω_0, jusqu'à fusionner avec la zone de l'instabilité de résonance.

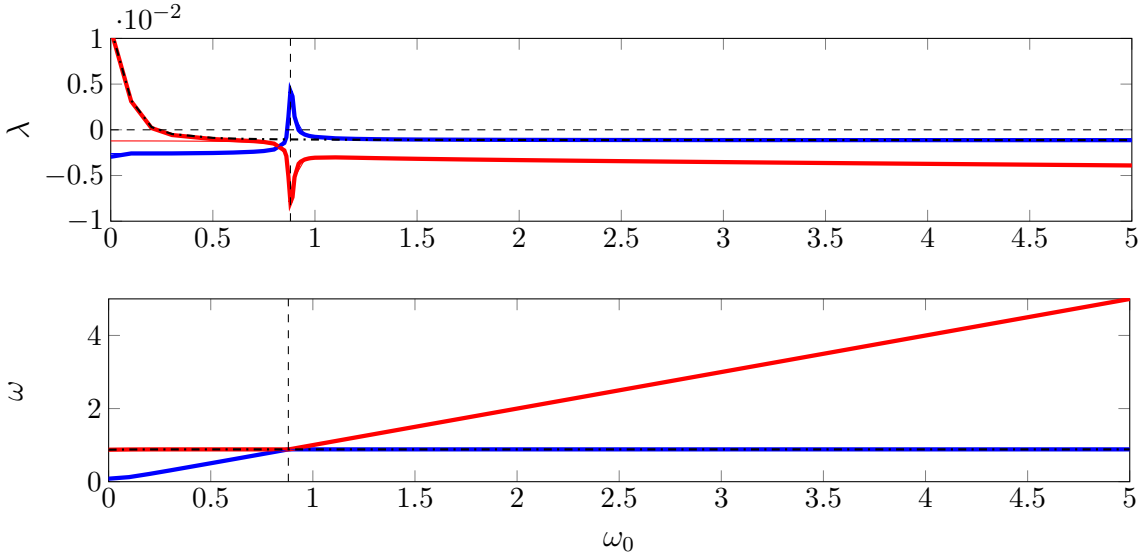


FIGURE 22 – ***Comparaison de différentes analyses de stabilité : (i) stabilité fluide-structure sur champs de base déformé (traits épais), (ii) stabilité fluide-structure sur champs de base non-déformé (traits fin) et (iii) stabilité fluide seul sur la configuration de base déformée (trait-point). Le mode FSM1 est représenté en bleu et FSM2 en rouge ($\mathcal{R}e = 100$, $\tilde{m} = 10^4$).***

6.4.4 Des stratégies de contrôle ?

On a vu dans les section précédentes que ω_0 et $\tilde{m}$ avaient une forte influence sur la stabilité du système. On peut donc se demander si un contrôle de l'écoulement est envisageable par l'utilisation (passive) de l'interaction fluide structure. Pour des raisons de simplicité, on précise que la discussion effectuée ici est basée sur des analyses de stabilité sur champs de base non-déformé.

Une stratégie de stabilisation On présente en Figure 23 l'évolution du taux de croissance du mode le plus instable en fonction de la pulsation propre ω_0, pour $\mathcal{R}e = \mathcal{R}e_{c,p}$, le Reynolds critique du système fluide (culot+plaques figées). Pour $\tilde{m} > 500$, on retrouve le phénomène d'anti-résonance qui précède la résonance, mis en évidence au paragraphe 6.4.2. Quand on passe de $\tilde{m} = 10^4$ à $\tilde{m} = 500$, la largeur de l'intervalle où a lieu cette anti-résonance augmente et les taux de croissance atteints sont de plus en négatifs. En choisissant $\tilde{m} = 500$ et $\omega_0 = 0.86$, on peut ainsi stabiliser le système. Cet effet demeure néanmoins très léger, de sorte que, au Reynolds critique du culot seul ($\mathcal{R}e_c = 103.6$), le système couplé est toujours instable, quelques soient $(\tilde{m}, \omega_0)$. En l'état, cette stratégie de contrôle n'est donc pas efficace. Il serait cependant intéressant de considérer cette même étude avec une longueur supérieure des plaques, moins défavorable à la stabilité du système (voir Figure 10).

Des stratégies de déstabilisation Si, en pratique, on vise souvent à stabiliser les écoulements, un objectif du contrôle peut aussi être de les déstabiliser (pour favoriser un mélange par exemple). A cette fin, le système étudié ici offre deux stratégies possibles. Dans un premier temps, une stratégie intuitive est d'ajouter des plaques de faible masse ($\tilde{m} \simeq 1-10$), sans force de rappel élastique. Dans un second temps, si on veut conserver un rapport de masse $\tilde{m}$ élevé (pour de raisons de tenue mécanique des systèmes par exemple), on peut déstabiliser l'écoulement en choisissant judicieusement ω_0, de sorte à déclencher la résonance fluide-structure.

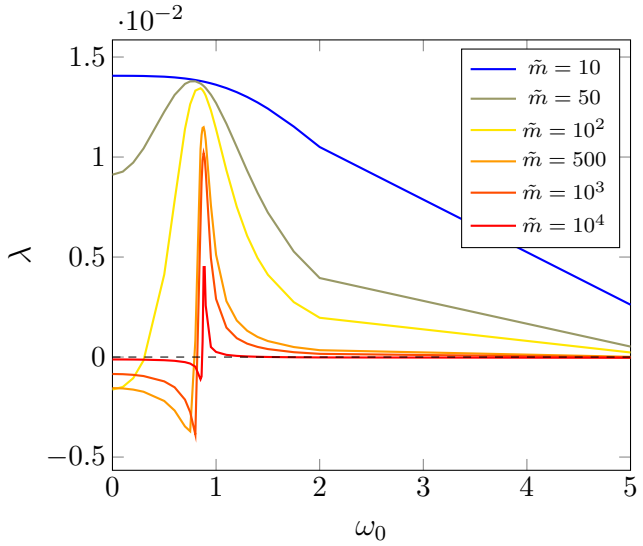


FIGURE 23 – ***Evolution du taux de croissance λ du mode le plus instable pour $\mathcal{R}e_{c,p} = 100.7$.***

7 Vers un code ALE non-linéaire ...

Dans toute la section précédente, on a travaillé autour des équations linéarisées du système fluide-structure. Par l'analyse de stabilité linéaire et des études paramétriques, on a pu montrer que le choix de la pulsation propre des plaques permet dans une certaine mesure de contrôler la stabilité d'un écoulement de culot. Pour investiguer plus précisément le phénomène et confronter les résultats de l'analyse de stabilité, on se propose d'écrire un code de simulation en temps des équations non-linéaires du mouvement. Dans cette section, on présente les premières étapes de l'élaboration de ce code. On insiste sur le fait qu'on indique ici seulement les choix techniques envisagés et les premiers calculs réalisés afin de poser les bases pour de futurs développements. Le code présenté ici n'est en aucun cas considéré comme validé au moment de l'écriture de ce rapport.

7.1 Quelle stratégie de couplage ?

Pour simuler en temps un problème d'interaction fluide-structure, deux types de stratégies peuvent être envisagées. D'une part, les solveurs dit ségrégés (*segregated solvers*) dans lesquels le problème fluide et le problème solide sont résolus séparément à chaque pas de temps. Des stratégies de type *Dirichlet-Neumann* sont classiquement utilisées *i.e.* le fluide est résolu en imposant des conditions limites de vitesse, puis le solide est résolu en imposant les contraintes issues du précédent calcul fluide. D'autre part, dans les solveurs dit couplés (*coupled solvers*), les deux problèmes sont résolus simultanément, les conditions d'interface étant donc implicitement satisfaites.

Les solveurs ségrégés présentent l'avantage d'une modularité supérieure puisque que les algorithmes utilisés pour résoudre les problèmes fluide et solide peuvent être modifiés de manière indépendante. On peut ainsi mettre à jour régulièrement les codes fluide et solide afin de rester au niveau de performance de l'état de l'art dans les deux domaines. L'inconvénient majeur de ces solveurs ségrégés réside dans des problèmes de stabilité récurrents, notamment pour des problèmes à faibles rapport de masse (typiquement en hémodynamique) [Tallec and Mouro, 2001], [Gerbeau and Vidrascu, 2003], [Causin et al., 2005]. On note que des solveurs ségrégés "fortement couplés" existent et réduisent significativement ces problèmes [Fernández et al., 2007]. C'est cependant au prix de coûteuses sous-itérations, à chaque pas de temps, afin d'assurer le couplage avec une précision suffisante pour obtenir la stabilité.

Les solveurs couplés présentent l'avantage de la stabilité, particulièrement si les itérations temporelles sont gérées de manière implicite. En revanche, ils nécessitent la résolution d'un large système non-linéaire couplant fluide et structure à chaque pas de temps, souvent par l'utilisation d'une méthode de type Newton. Un attention particulière doit donc être portée, dans chaque cas, au design de préconditionneurs adaptés pour assurer une résolution efficace des problèmes linéaires rencontrés à chaque sous-itération de la méthode de Newton [Heil, 2004].

Dans le débat sur l'efficacité des solveurs couplés par rapport aux solveurs ségrégés, on mentionnera l'étude de [Heil et al., 2008] qui compare, avec une même bibliothèque éléments finis, les performances des deux types de schémas sur plusieurs cas test. Dans les cas à faibles rapports de masse, le solveur couplé est montré clairement plus performant (il est parfois même le seul à converger). Dans les problèmes à plus grands rapports de masses -

où les solveurs ségrégés sont supposés surpasser largement leurs homologues couplés - des performances équivalentes sont montrées (moyennant l'utilisation d'un "bon" préconditionneur pour le solveur couplé). Récemment, [Lozovskiy et al., 2015] ont proposé un solveur couplé inconditionnellement stable, mais ne nécessitant que l'inversion d'un système linéaire à chaque pas de temps.

7.2 Quelle description cinématique ?

En parallèle de la stratégie de couplage, un second choix déterminant dans le design d'un code en temps fluide-structure est celui de la description cinématique, et par conséquent celui de la description de l'interface fluide-solide.

Une première possibilité, celle qu'on a choisit dans le cadre de l'analyse de stabilité linéaire, consiste à utiliser les équations ALE. Le suivi de l'interface est alors de type suivi d'interface (*interface tracking*) car la frontière est en permanence suivie par l'intermédiaire des noeuds de maillage qui la composent. Le formalisme ALE a été indifféremment utilisé dans des solveurs couplés [Richter, 2015] ou ségrégés [Fernández et al., 2007]. Il présente l'avantage de ne pas nécessiter l'introduction d'équations/variables supplémentaires pour suivre l'interface et de permettre une détermination précise de l'écoulement à la frontière fluide-solide. En revanche, les changement topologiques (contact,...) ne sont pas supportés, et, pour les grandes déformations, l'extension (voir section 4.5) peut perdre sa régularité et faire exploser la solution.

Pour gérer les grandes déformations et les changement topologiques, des méthodes de type capture d'interface (*interface capturing*) sont nécessaires. Dans ce cas, la frontière fluide solide n'est plus partie intégrante du maillage mais peut en couper les éléments. Une littérature abondante de ce type de méthodes existe, partiellement commune avec l'étude des écoulement diphasiques (méthodes *Volume of Fluid* [Hirt and Nichols, 1981], méthode *Level Set* [Osher and Fedkiw, 2003] notamment). On peut ainsi proposer des codes complètement Eulériens : le fluide *et* la structure sont décrits de manière eulérienne [Richter, 2013].

Une solution intermédiaire, consiste à utiliser une description Lagrangienne-Eulérienne (différent du ALE). Le fluide est alors décrit de manière purement eulérienne (maillage fixe) et le solide manière purement Lagrangienne (maillage mobile et suivant l'interface). L'interface est donc bien suivie dans la partie solide, mais doit être capturée du côté du fluide. Historiquement, la Méthode des Frontières Immergées (*Immersed Boundary Methods*) utilise une telle description [Peskin, 1977],[Peskin, 2002]. La capture de l'interface dans le domaine fluide y est réalisée à l'aide de fonctions de forçage localisées qui "imitent" la présence du solide.

7.3 Solution adoptée

Dans le cadre de notre étude, nous ne rencontrerons vraisemblablement pas de cas de déformations démesurées du solide ; une méthode de type capture d'interface n'est donc pas indispensable. Des problèmes de contact sont également improbables : un formalisme tout Eulérien n'est donc pas requis. En revanche, on appréciera de pouvoir réutiliser la description ALE qu'on a montré particulièrement adaptée à l'analyse de stabilité. En ce qui concerne la stratégie de couplage, le choix d'un solveur couplé s'impose puisqu'on veut pouvoir investiguer des rapports de masse proches de l'unité. Enfin, si il n'est pas ici la

préoccupation principale, un niveau de performance raisonnable sera apprécié dans la perspective de réaliser d'éventuelles études paramétriques. Etant donnés ces besoins, on décide d'implémenter un code semblable à celui proposer par [Lozovskiy et al., 2015].

7.3.1 Discrétisation temporelle

Dans le cadre de ce rapport, on ne présente que quelques résultats préliminaires des premières étapes de validation de notre code en temps. Les cas tests qui seront étudiés utilisant un solide élastique, on cherche à résoudre dans toute cette partie le système (44)-(50), où la loi de contrainte du solide élastique est de type Saint-Venant Kirchhoff (23). On rappelle la particularité de l'algorithme de [Lozovskiy et al., 2015] qui est de ne nécessiter à chaque pas de temps que la résolution d'un système linéaire. Pour ce faire, toutes les non-linéarités doivent être (judicieusement) supprimées. Ainsi toutes les non-linéarités dues aux termes de déplacement du maillage fluide, au terme d'advection de Navier-Stokes et au modèle élastique non-linéaire de Saint-Venant-Kirchhoff seront explicitées. Ceci est réalisé par extrapolation de la solution obtenue aux pas de temps antérieurs, par une extrapolation de type Newton-Gregory : pour toute fonction f, connue aux instants k et $k-1$, on approche sa valeur à l'instant $k+1$ par :

$$\tilde{f}^k = 2f^k - f^{k-1} \tag{82}$$

Par ailleurs les dérivées temporelles seront approximées par une formule de type BDF (*Backward Differences Formulas*) :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]^k = \frac{3f^k - 4f^{k-1} + f^{k-2}}{2\Delta t} \tag{83}$$

Note : (82) et (83) permettent d'obtenir un ordre 2 temporel théorique.

On réécrit maintenant les équations du mouvement, dont les termes non-linéaires ont été partiellement explicités grâce à (82) et dont les dérivées temporelles sont approchées par (83).

Equation fluide

$$\tilde{J}^k \left[\left.\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{f}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}\right]^{k+1} + \left(\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}^{\mathrm{f}k+1}\right)\tilde{J}^k\mathbf{F}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}k})\right)\left(\mathbf{u}^{\mathrm{f}k} - \widetilde{\left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}\right]^k}\right) =$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\tilde{J}^k\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}k}}(\mathbf{u}^{\mathrm{f}k+1}, p^{k+1})\mathbf{F}^{-T}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}k})\right) \qquad \mathbf{x}\in\Omega^{\mathrm{f}}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\tilde{J}^k\mathbf{F}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}k})\mathbf{u}^{\mathrm{f}k+1}\right) = 0 \qquad \mathbf{x}\in\Omega^{\mathrm{f}}$$

Equation solide On ré-écrit d'abord (46) en injectant le tenseur des contraintes de Saint-Venant Kirchhoff (23) et en définissant la vitesse solide $\mathbf{u}^{\mathrm{s}}$ de sorte à ne garder que des dérivées temporelles d'ordre 1 :

$$\tilde{m}\left.\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{s}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(\mathbf{FS}) \qquad \mathbf{x}\in\Omega^{\mathrm{s}}$$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} = \mathbf{u}^{\mathrm{s}} \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{s}}$$

On propose ensuite la discrétisation temporelle :

$$\tilde{m}\left[\left.\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{s}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}\right]^{k+1} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{F}(\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}k}})\mathbf{S}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}k}}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}k+1})\right) \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{s}}$$

$$\left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}\right]^{k+1} = \mathbf{u}^{\mathrm{s}k+1} \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{\mathrm{s}}$$

où on pose :

$$\mathbf{S}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}) = 2\mu_s \mathbf{E}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}) + \lambda \mathrm{tr}(\mathbf{E}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}))\mathbf{Id}$$

$$\mathbf{E}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}) = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}} + \nabla_{\mathbf{x}}^{T}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}} + \frac{1}{2}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}^{T}\nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}} + \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}T}\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}\right)\right)$$

Equation d'extension On choisit d'utiliser ici une extension de type *élasticité linéaire pondérée* (voir 4.5), avec l'hypothèse des petits déplacements (suffisante pour que le maillage reste régulier dans les cas tests présentés ci-après)

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}k+1}) = 0 \tag{84}$$

Conditions limites on a toujours les conditions limites de continuité de vitesse contrainte et déplacement du maillage :

$$\mathbf{u}^{\mathrm{f}k+1} = \mathbf{u}^{\mathrm{s}k+1} \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}}$$

$$\tilde{J}^{k}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}k}}}(\mathbf{u}^{\mathrm{f}k+1}, p^{k+1})\mathbf{F}^{-T}(\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}k}})\ \mathbf{n}_{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}k}})\mathbf{S}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}k}}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}k+1})\mathbf{n}_{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}}$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}k+1} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}k+1} \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{fs}} \tag{85}$$

7.3.2 Formulation faible

On propose la formulation faible suivante :

Trouver $(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}k+1})$ tels que, pour tout $(\check{\mathbf{u}}, \check{p}, \check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{s}}) \in \left(\mathcal{V}(\Omega), \mathcal{L}^2(\Omega^{\mathrm{f}}), \mathcal{V}(\Omega^{\mathrm{s}})\right)$

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \tilde{J}^k \left[\left.\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{f}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}\right]^{k+1} \cdot \check{\mathbf{u}} + \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left(\left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{\mathrm{f}k+1}\right) \tilde{J}^k \mathbf{F}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}k})\right) \left(\mathbf{u}^{\mathrm{f}k} - \widetilde{\left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}\right]^{k}}\right) \cdot \check{\mathbf{u}} \\
+ \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left(\tilde{J}^k \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}k}}(\mathbf{u}^{\mathrm{f}k+1}, p^{k+1}) \mathbf{F}^{-T}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}k})\right) : \nabla_{\mathbf{x}} \check{\mathbf{u}} \\
+ \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\tilde{J}^k \mathbf{F}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}k}) \mathbf{u}^{\mathrm{f}k+1}\right) \check{p} \\
+ \int_{\Omega^{\mathrm{s}}} \tilde{m} \left[\left.\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{s}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}\right]^{k+1} \cdot \check{\mathbf{u}} + \int_{\Omega^{\mathrm{s}}} \left(\mathbf{F}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{s}k}) \mathbf{S}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{s}k}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}k+1})\right) : \nabla_{\mathbf{x}} \check{\mathbf{u}} \\
+ \int_{\Omega^{\mathrm{s}}} \left(\left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}\right]^{k+1} - \mathbf{u}^{\mathrm{s}k+1}\right) \cdot \check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{s}} = 0
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Note 1 : Les trois premières lignes représentent l'équation de Navier-Stokes, la quatrième ligne l'équation solide et la cinquième ligne l'équation de définition de la vitesse dans le solide.

Note 2 : La condition de continuité de contrainte est assurée par la disparition des termes de bords sur Γ_{fs} issus de l'intégration par partie.

Note 3 : La continuité de la vitesse sur Γ_{fs} est assurée par l'utilisation d'éléments finis continus pour $\mathbf{u}$.

Note 4 : Comme les termes de déplacement du maillage fluide sont explicités, le nouveau déplacement du maillage fluide $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}k+1}$ est calculé dans un second temps en résolvant (84) avec la condition limite (85).

La discrétisation spatiale est réalisée par des éléments finis $\mathcal{P}^2$ pour $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}$ et $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}$ et $\mathcal{P}^1$ pour p.

Finalement, le pseudo-algorithme est le suivant :

Algorithm 2 Code ALE semi-implicite

Initialize : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, $p = p_0$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}} = {\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}}_0$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} = {\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_0$
while $t \leq t_{\max}$ **do**
  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{s}}) \leftarrow$ **solve** (86)
  $(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) \leftarrow$ **solve** (84)
  extrapolate $\tilde{J}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{s}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}}$ through (83)
  $t \leftarrow t + \Delta t$
end while

7.3.3 Validation

Pour valider le code, on utilise le benchmark proposé par [Turek and Hron, 2006] qui consiste en un cylindre rigide de rayon $r = 0.05$ et centre $C = (0.2, 0.2)$ placé dans canal (longueur $L = 2.5$, hauteur $H = 0.41$) et auquel est attaché une poutre flexible (longueur

$l = 0.35$, épaisseur $h = 0.02$) (Figure 24). Le fluide est modélisé par les équations de Navier-Stokes et la structure flexible par une loi de contraintes de Saint-Venant Kirchhoff.

On impose le non-glissement sur Γ_0 et Γ_{lat} ; une contrainte nulle sur Γ_{out} et un profil de vitesse parabolique sur Γ_{in} (adimensionné par la vitesse débitante U_d, comme en 6.1.1) :

$$U_{in}(y,t) = 1.5\frac{y(H-y)}{(H/2)^2}\mathbf{e_x}\begin{cases} \dfrac{1-\cos((\pi/2)t)}{2} & \text{si } t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases} \tag{87}$$

On définit différentes quantités à calculer :

— la déplacement $\boldsymbol{\xi}^A(t) = \xi_x^A\mathbf{e_x} + \xi_y^A\mathbf{e_y}$ du point $A(t)$ (voir Figure (24))

— la force de traînée :

$$\mathcal{F}_D(\mathbf{u}_b, p_b) = \rho U_d^2 \int_{\Gamma_0\cup\Gamma_{\text{fs},t}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{f}}(\mathbf{u},p)\mathbf{n}^{\text{s}}\cdot\mathbf{e_x}$$

— le coefficient de portance :

$$\mathcal{F}_L(\mathbf{u}_b, p_b) = \rho U_d^2 \int_{\Gamma_0\cup\Gamma_{\text{fs},t}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{f}}(\mathbf{u},p)\mathbf{n}^{\text{s}}\cdot\mathbf{e_y}$$

— dans les cas instationnaires, la fréquence f de $\mathcal{F}_L$.

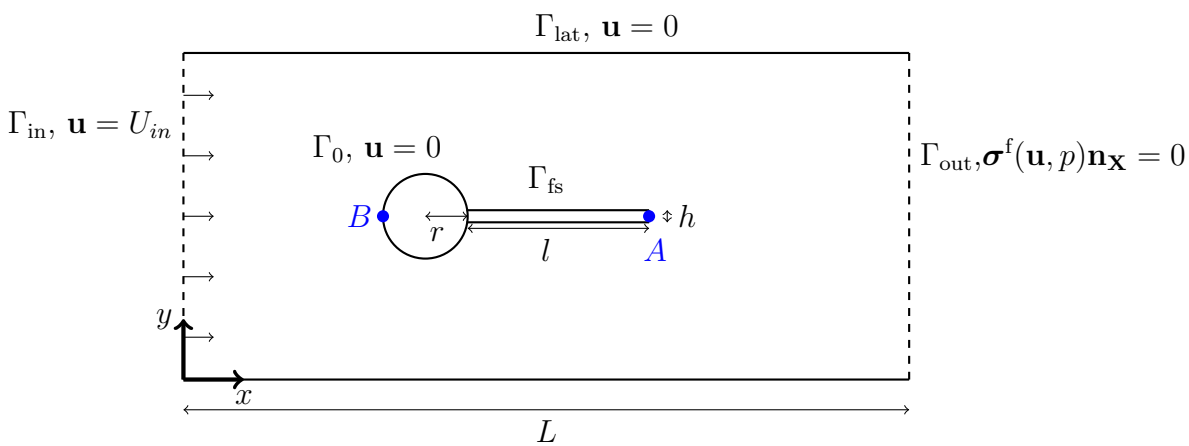


FIGURE 24 – ***Configuration du cas test de [Turek and Hron, 2006].***

Cas test fluide seul On veut valider dans un premier temps la partie fluide du code en gardant le solide rigide. On reporte dans le Tableau 1 et 2 les résultats obtenus. La correspondance avec les résultats de Turek est excellente pour le cas où la solution est stationnaire (CFD2). En revanche, dans le cas où une solution de type lâcher tourbillonnaire se met en place (CFD3), on s'éloigne sensiblement de la référence.

	nombre d'éléments	$\mathcal{F}_D$ [N]	$\mathcal{F}_L$ [N]
résultat	7069	136.2	10.45
référence	589824	136.7	10.53
écart relatif	-	0.3%	0.4%

TABLE 1 – ***Cas test stationnaire CFD2*** *($\rho_f = 10^3$ **kg/m**$^3, \nu_f = 10^{-3}$ **m**^{2}**/s**$, U_d =$ 1 **m/s**). **On utilise un pas de temps** $\Delta t = 0.01$**s**.*

	nombre d'éléments	f [Hz]	$\mathcal{F}_D$ moy. [N]	$\mathcal{F}_D$ ampl. [N]	$\mathcal{F}_L$ moy. [N]	$\mathcal{F}_L$ ampl. [N]
résultat	7069	4.44	438.23	6.05	-11.06	466.4
référence	589824	4.40	439.45	5.62	-11.89	437.8
écart relatif	-	0.9 %	0.2 %	8 %	7 %	6 %

TABLE 2 – ***Cas test instationnaire CFD3*** *($\rho_f = 10^3$ **kg/m**$^3, \nu_f = 10^{-3}$ **m**^{2}**/s**$, U_d =$ 2 **m/s**). **On utilise un pas de temps** $\Delta t = 0.001$**s**.*

Cas test solide seul Dans un second temps, on veut valider la partie solide uniquement du code (pas de fluide). Turek propose pour cela de soumettre la poutre au champs de gravité $-g\mathbf{e_y}$ et de chercher une solution stationnaire (CSM1) ou bien de regarder les oscillations de la poutre au cours du temps en partant de l'état horizontal (CSM3). Les résultats obtenus sont présentés dans les Tableaux 3 et 4. Dans les deux cas, on a une bonne correspondance avec la référence.

	nombre d'éléments	ξ_x^{A} [$\times 10^{-3}$m]	ξ_y^{A} [$\times 10^{-3}$m]
résultat	293	-7.05	-65.4
référence	22772	-7.19	-66.1
écart relatif	-	2%	1%

TABLE 3 – ***Cas test stationnaire CSM1*** *($\rho_s = 10^3$ **kg/m**$^3, \nu_s = 0.4, E =$ $1.4\,10^6$ **kg/m/s**$^2, g = 2$ **m/s**^{2}).*

	nombre d'éléments	f [Hz]	ξ_x^{A} moy. [mm]	ξ_x^{A} ampl. [mm]	ξ_y^{A} moy. [mm]	ξ_y^{A} ampl. [mm]
résultat	293	1.099	-14.17	14.17	-63.35	64.38
référence	5120	1.100	-14.31	14.31	-63.61	65.16
écart relatif	-	0.1 %	0.9 %	0.9 %	0.4 %	1 %

TABLE 4 – ***Cas test instationnaire CSM3*** *($\rho_s = 10^3$ **kg/m**$^3, \nu_s = 0.4, E =$ $1.4\,10^6$ **kg/m/s**$^2, g = 2$ **m/s**^{2}). **On utilise un pas de temps** $\Delta t = 0.002$**s**.*

Cas test fluide-structure La dernière étape de la validation consiste à simuler le cas couplé fluide-structure. Dans un premier cas test (FSI1), les paramètres sont ajustés de sorte à obtenir une solution stationnaire alors que dans le second cas test (FSI3), on doit

obtenir une solution instationnaire. Les résultats sont présentés dans les Tableaux 5 et 6. Alors qu'on a une bonne correspondance avec les valeurs références pour FSI1, le cas FSI3 n'est pas satisfaisant. En particulier, les valeurs de traînée et portance sont éloignées de la référence (25% d'écart sur l'amplitude de la trainée ; 37% d'écart sur la portance moyenne). Par une étude de convergence, on a montré que la résolution spatiale n'était pas en cause ici. Par ailleurs, des simulations avec un pas de temps $\Delta t = 5.10^{-4}$ (non présentées ici) ont permis de vérifier que la résolution temporelle était suffisante.

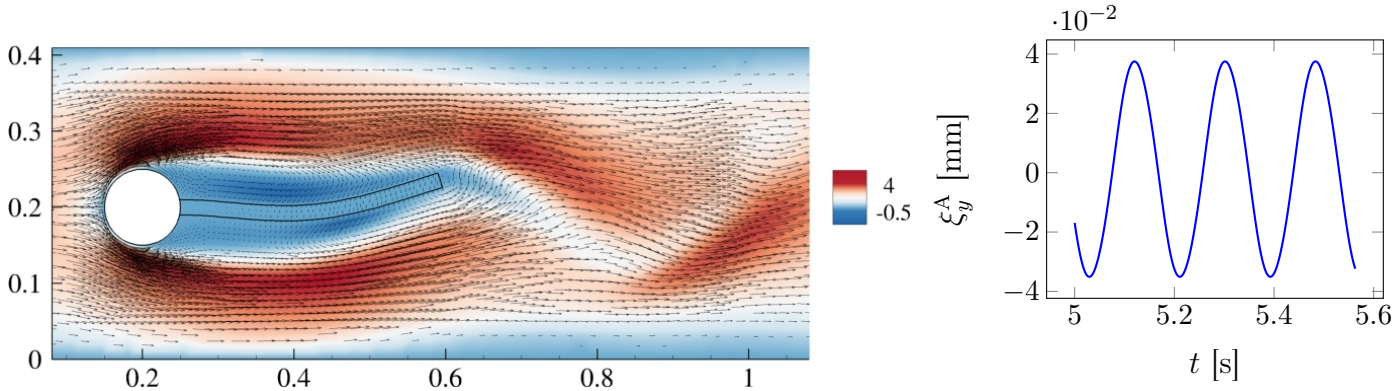
	nombre d'éléments (f+s)	ξ_x^{A} [mm]	ξ_y^{A} [mm]	$\mathcal{F}_D$ [N]	$\mathcal{F}_L$ [N]
résultat	12088+311	0.0226	0.796	14.07	0.759
référence	253952	0.0227	0.821	14.30	0.764
écart relatif	-	0.4 %	3 %	1.6 %	0.7 %

TABLE 5 – ***Cas test stationnaire FSI1*** *($\rho_s = \rho_f = 10^3$ **kg/m**$^3, \nu_s = 0.4, \nu_f = 10^{-3}$ **m**^{2}**/s**$, E = 1.4\,10^6$ **kg/m/s**$^2, U_d = 0.2$ **m/s**). **On utilise un pas de temps** $\Delta t = 0.01$**s**.*

	nombre d'éléments (f+s)	N dof	f [Hz]	ξ_x^{A} moy. [mm]	ξ_x^{A} ampl. [mm]
M0	12088+311	57800	5.49	-3.07	2.88
M1	19293+1362	99288	5.52	-2.96	2.77
M2	25474+2444	136579	5.49	-2.95	2.77
réf. Rannacher	-	72696	5.42	-2.84	2.67
réf. Turek	-	304128	5.46	-2.88	2.72

	ξ_y^{A} moy. [mm]	ξ_y^{A} ampl. [mm]	$\mathcal{F}_D$ moy. [N]	$\mathcal{F}_D$ ampl. [N]	$\mathcal{F}_L$ moy. [N]	$\mathcal{F}_L$ ampl. [N]
M0	1.29	36.22	489.2	19.63	3.6	163.41
M1	1.20	35.58	489.33	19.89	2.145	160
M2	1.20	35.53	490.3	19.99	1.42	159.1
réf. Rannacher	1.28	34.61	452.4	26.19	2.36	152.7
réf. Turek	1.47	34.99	460.5	27.74	2.50	153.9

TABLE 6 – ***Cas test instationnaire FSI3*** *($\rho_s = \rho_f = 10^3$ **kg/m**$^3, \nu_s = 0.4, \nu_f = 10^{-3}$ **m**^{2}**/s**$, E = 5.6\,10^6$ **kg/m/s**$^2, U_d = 2$ **m/s**). **On utilise un pas de temps** $\Delta t = 0.001$**s**. **Cas références extraits de [Turek et al., 2010].***



(a) Vitesse axiale à $t = 5.12$ s

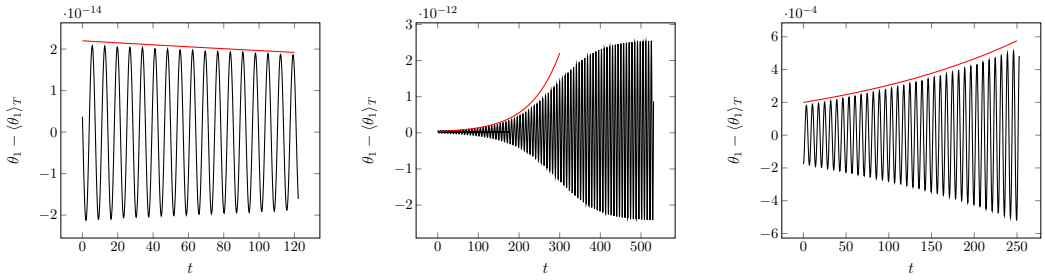
(b) Déplacement du point A

FIGURE 25 – ***Cas test FSI3.***

Discussion Les différents cas tests précédents ont montré que les code approche correctement les valeurs cibles dans les cas stationnaires que ce soit pour le fluide seul, le solide seul ou un cas couplé. Les quelques écarts restant sont attribués à un effet de raffinement de maillage. En revanche, dans les cas instationnaires, seul le cas structure seul présente des écarts convaincants à la référence. Dans les cas fluide seul et couplé on a des écarts significatifs, notamment dans les valeurs des forces de traînée et portance à l'interface fluide-solide. On a également pu noter dans les cas FSI que la condition de continuité de contrainte sur Γ_{fs} n'était pas respectée de manière satisfaisante. A ce stade du développement, on pense que les écarts observés sont imputables au non-respect de cette condition, pourtant implicitement satisfaite dans la formulation faible (86). Notons qu'on a retrouvé plus généralement ce problème en calculant, dans `Freefem++`, la simple déformée d'une poutre soumise à son propre poids. En effet, le résultat numérique ne donne pas une contrainte nulle aux bords libres de la poutre comme attendu. Ce problème numérique devra être réglé pour valider pleinement le code.

7.4 Quelques résultats non-linéaires

Conscient de l'état actuel de validation du code non-linéaire présenté dans la section 7.3.3, on peut néanmoins le tester sur le système (culot+plaques). Etant donné le modèle de solide rigide utilisé, la condition de continuité de contrainte disparait du système d'équations à résoudre. Les difficultés rencontrées dans nos cas de validation quant au respect de cette condition ne rentrerons donc pas en compte. On veut comparer ici les résultats de l'analyse de stabilité linéaire sur champs de base déformé avec les résultats non-linéaires. Pour cela, on donne en condition initiale du code non-linéaire la superposition de l'écoulement de base et du mode le plus instable pour quelques triplets $(\mathcal{R}e, \tilde{m}, \omega_0)$. Les résultats présentés en Figure 26 montrent une bonne correspondance entre la croissance/décroissance prévue par l'analyse de stabilité et l'intégration en temps, donnant un élément de validation supplémentaire des analyses de stabilité réalisées en section 6.4.



(a) $\mathcal{R}e = 100$, $\tilde{m} = 10^4$, $\omega_0 = 10$ (b) $\mathcal{R}e = 110$, $\tilde{m} = 10^4$, $\omega_0 = 10$ (c) $\mathcal{R}e = 100$, $\tilde{m} = 10^4$, $\omega_0 = 0.88$

FIGURE 26 – ***Comparaison de l'analyse de stabilité linéaire (sur champs de base déformé) avec les résultats non-linéaires. On représente en noir l'évolution temporelle de l'angle θ_1 et en rouge la croissance/décroissance temporelle prévue par l'analyse linéaire.***

8 Conclusion et perspectives

Conclusion technique L'objectif premier de ce stage était d'appliquer l'analyse de stabilité linéaire à cas particulier d'interaction fluide-structure où les structures sont localisées dans une région sensible d'un écoulement de culot. Par l'étude préliminaire d'un problème linéaire forcé, on a pu se pencher sur un problème technique spécifique, lié à l'utilisation de conditions limites sous forme faible. En effet, on a montré que d'infimes erreurs numériques dans les condition limites à l'interface fluide-structure pouvaient mener à des réponses linéaires aux symétries théoriquement exclues. Au-delà du problème technique lui-même, on a pu observer la nature d'*amplificateur de bruit* du système considéré ainsi que l'extrême sensibilité de l'écoulement global à de petites erreurs dans la région des plaques. Dans un second temps, on a réalisé l'analyse de stabilité linéaire du système couplé. On a ainsi montré que l'interaction du fluide et de la structure fait émerger une instabilité, dès lors que deux modes du système possèdent des pulsations similaires. Cette instabilité est donc liée à un phénomène de résonance fréquentielle, communément désigné par le terme VIV dans la littérature. En parallèle, un phénomène d'anti-résonance, amenant une stabilisation du système, a été constaté pour des pulsations propres légèrement inférieures à la résonance. Finalement, en utilisant judicieusement la résonance et l'anti-résonance, on a montré qu'un choix adéquat du couple $(\tilde{m}, \omega_0)$ pouvait effectivement changer la stabilité du système : la résonance permet de déstabiliser le système (pour intensifier un mélange par exemple), alors que que l'anti-résonance permet de stabiliser le système. Si l'effet stabilisant de l'anti-résonance reste faible, la compréhension de son origine physique pourrait permettre d'imaginer des systèmes où il serait plus prononcé. Une seconde partie, plus modeste, de ce rapport est consacrée à la présentation des premiers développements d'un code de simulation en temps d'un problème fluide-structure. La mise au point d'un tel code répond au besoin de pouvoir comparer les résultats des analyses linéaires à la "réalité" non-linéaire. Après une revue synthétique des différentes stratégies de couplage et descriptions cinématiques présentes dans la littérature, on propose un code ALE semi-implicite permettant de n'inverser à chaque pas de temps qu'un système linéaire. Des premiers essais de validation ont montré que la stabilité n'en était pas pour autant compromise. Au stade actuel du développement, on a constaté des écarts significatifs aux valeurs de référence qu'on s'est donné. Ces écarts semblent être liés au non-respect de la condition de continuité de contrainte à l'interface fluide-structure et devront être étudiés ultérieurement. En effet, la perspective d'éviter l'inversion d'un système non-linéaire à chaque pas de temps est particulièrement prometteuse du point de vue du temps de calcul. Conscient des limitations actuelles du code non-linéaire, on a tout de même pu confronter ses résultats à l'analyse de stabilité linéaire, sur notre système d'étude. Une correspondance satisfaisante a été trouvée entre les deux approches, fournissant ainsi un argument de validation supplémentaire du processus d'analyse de stabilité linéaire.

Conclusion générale Ce stage s'inscrivait dans le cadre de la première année du financement ERC obtenu par Olivier Marquet. Cette année devait notamment permettre (i) de développer les outils de l'analyse de stabilité linéaire, appliquée à des systèmes fluide-structure (travail de Jean-Lou Pfister, doctorant) et (ii) de tester une première configuration dans la perspective d'un contrôle d'écoulement (travail présenté ici). Les discussions avec les différentes personnes impliquées dans cet ERC ont rapidement montré la nécessité d'écrire

un code en temps intégrant les équations fluide-structure afin de vérifier et enrichir les résultats linéaires. Cet objectif - qui dépasse le cadre temporel du stage - s'est donc ajouté à l'objectif initial et a été partiellement atteint. La finalisation et la validation complète du code non-linéaire étant intéressante pour tous les membres de l'ERC, ce travail sera vraisemblablement poursuivi lors des premiers mois de ma thèse, qui débutera en novembre 2016, au DAFE. Enfin, si toutes les études réalisées jusqu'ici dans le cadre de l'ERC concernait des écoulements laminaires et incompressibles, cette thèse aura pour objectif d'adapter les outils à l'étude d'écoulements compressibles et/ou turbulents.

A Annexe : quelques propriétés utiles

Les propriétés exposées dans cette annexe permettent de transporter facilement les opérateurs gradient et divergence du domaine déformé vers le domaine de référence.

Propriété 1 (Formule de Nanson) Considérons un domaine de référence Ω pour lequel les éléments de surface sont notés $dS_{\mathbf{x}}$, et un domaine déformé $\Omega_t = \boldsymbol{\phi}(\Omega, t)$, où $\boldsymbol{\phi} : \mathbf{x} \to \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ associe à chaque $\mathbf{x}$ la position courante $\mathbf{X}$. Les éléments de surface du domaine déformé sont notés $dS_{\mathbf{X}}$. On note $\mathbf{F} = \partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x}$ et $J = \det \mathbf{F}$. La relation entre la normale dans le domaine de référence $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$ et dans le domaine déformé $\mathbf{n}_{\mathbf{X}}$ est :

$$\mathbf{n}_{\mathbf{X}} dS_{\mathbf{X}} = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{x}}.$$

Propriété 2 (Transport de l'opérateur gradient) Considérons un domaine de référence Ω et un domaine déformé $\Omega_t = \boldsymbol{\phi}(\Omega, t)$, où $\boldsymbol{\phi} : \mathbf{x} \to \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ associe à chaque $\mathbf{x}$ la position courante $\mathbf{X}$. On note $\mathbf{F} = \partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x}$ et $J = \det \mathbf{F}$. Pour des quantités scalaire et vectorielle $q_{\mathbf{X}}$, $\mathbf{q}_{\mathbf{X}}$ définies sur le domaine déformé et leur équivalents $q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = q_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$, $\mathbf{q}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$ définis sur le domaine de référence, on a :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}} q_{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \nabla_{\mathbf{x}} q_{\mathbf{x}} \\ \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{q}_{\mathbf{X}} &= (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{q}_{\mathbf{x}})\, \mathbf{F}^{-1}.\end{aligned}$$

Propriété 3 (Transport de l'opérateur divergence) Considérons un domaine de référence Ω et un domaine déformé $\Omega_t = \boldsymbol{\phi}(\Omega, t)$, où $\boldsymbol{\phi} : \mathbf{x} \to \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ associe à chaque $\mathbf{x}$ la position courante $\mathbf{X}$. On note $\mathbf{F} = \partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x}$ et $J = \det \mathbf{F}$. Pour des quantités vectorielle et matricielle $\mathbf{q}_{\mathbf{X}}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}}$ définies sur le domaine déformé et leur équivalents $\mathbf{q}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$ définis sur le domaine de référence, on a :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{X}} &= (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{q}_{\mathbf{x}}) : \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = \frac{1}{J} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} \right] \\ \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{X}} &= (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}) : \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = \frac{1}{J} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[J\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \right]\end{aligned}$$

B Annexe : Détails calculatoires pour l'analyse de stabilité linéaire

Calcul du champs de base : Méthode de Newton

On fournit dans cette section les expressions détaillées des termes du système (67)-(71).

Termes fluides On rappelle que :

$$\mathcal{R}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}, \mathbf{f}) = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \Big\{ (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{u}\cdot\check{\mathbf{u}} + \left[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\mathbf{u}, p)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})^T\right] : \nabla_{\mathbf{x}}\check{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{u}\right)\check{p} \Big\} + \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \mathbf{f}\cdot\check{\mathbf{u}}$$

Où on a noté, pour simplifier les expressions :

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) = J\mathbf{F}^{-1}$$

— **Dérivée par rapport aux variables fluides** : le seul terme non-linéaire en $[\mathbf{u}, p]$ est le terme d'advection, on obtient donc rapidement :

$$\left.\frac{\partial\mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial[\mathbf{u}, p]}\right|_{\mathbf{u},p}(\delta\mathbf{u}, \delta p) = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \Big\{ \left[(\nabla_{\mathbf{x}}\delta\mathbf{u})\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\delta\mathbf{u}\right]\cdot\check{\mathbf{u}} + \left[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta\mathbf{u}, \delta p)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})^T\right] : \nabla_{\mathbf{x}}\check{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\delta\mathbf{u}\right)\check{p} \Big\}$$

— **Dérivée par rapport aux variables de déplacement de l'extension** : $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\mathbf{u}, p)$ sont les deux termes dépendant de $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}$. On définit donc :

$$\delta\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) = \left.\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} \qquad \delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{u},\mathbf{p},\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) = \left.\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}}{\partial\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\mathbf{u},p,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}$$

Ainsi on a :

$$\left.\frac{\partial\mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \Big\{ (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})\delta\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{u}\cdot\check{\mathbf{u}} + \left[\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{u},\mathbf{p},\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})^T + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\mathbf{u}, p)\delta\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})^T\right] : \nabla_{\mathbf{x}}\check{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\delta\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})\mathbf{u}\right)\check{p} \Big\}$$

— **Dérivée par rapport à f** : on obtient immédiatement :

$$\left.\frac{\partial\mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial\mathbf{f}}\right|_{\mathbf{f}}\delta\mathbf{f} = \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \delta\mathbf{f}\cdot\check{\mathbf{u}}$$

Termes solides On rappelle que :

$$\mathcal{R}^{\mathrm{s}}(\theta_i, \mathbf{f}) = \omega_0^2 \theta_i - \frac{1}{\tilde{m}\chi} \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \big((\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x}, \theta_i) - \mathbf{x}_{O_i}) \wedge \mathbf{f} \big) \cdot \mathbf{e_z} \tag{88}$$

— **Dérivée par rapport aux variables solides** : on définit d'abord :

$$\delta \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\delta\theta_i) = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i} \delta\theta_i \tag{89}$$

qui se calcule facilement à partir de la description cinématique des plaques (16). Ainsi,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i} \delta\theta_i = \omega_0^2 \delta\theta_i - \frac{1}{\tilde{m}\chi} \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \big(\delta \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\delta\theta_i) \wedge \mathbf{f} \big) \cdot \mathbf{e_z} \tag{90}$$

— **Dérivée par rapport à f** : on obtient immédiatement

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{\mathbf{f}} \delta\mathbf{f} = -\frac{1}{\tilde{m}\chi} \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \big((\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\mathbf{x}, \theta_i) - \mathbf{x}_{O_i}) \wedge \delta\mathbf{f} \big) \cdot \mathbf{e_z} \tag{91}$$

Termes d'extension On rappelle que :

$$\mathcal{R}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}, \boldsymbol{\phi}) = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})^T \right] : \nabla_{\mathbf{x}} \check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \boldsymbol{\phi} \cdot \check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}}$$

— **Dérivée par rapport aux déplacement de l'extension** : comme pour le fluide on définit :

$$\delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}(\delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}} \right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}} \delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}$$

Ainsi on a :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}} \right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}} \delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left[\delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}(\delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})^T + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) \delta \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})^T \right] : \nabla_{\mathbf{x}} \check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}}$$

— **Dérivée par rapport à $\boldsymbol{\phi}$** : on obtient immédiatement :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right|_{\boldsymbol{\phi}} \delta\boldsymbol{\phi} = \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \check{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}}$$

Condition de continuité du déplacement On rappelle que

$$\mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}, \theta_i) = \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} (\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} - \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\theta_i)) \cdot \check{\boldsymbol{\phi}}$$

— **Dérivée par rapport au déplacement de l'extension** :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}} \right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}} \delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} = \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} \cdot \check{\boldsymbol{\phi}}$$

— **Dérivée par rapport aux variables solides**

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i} \delta\theta_i = \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} -\delta \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\delta\theta_i) \cdot \check{\boldsymbol{\phi}}$$

Condition de continuité de vitesse $\mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$ est linéaire en $\mathbf{u}$; la dérivation est immédiate.

Problème aux valeurs propres

On détaille maintenant le passage de (76) à (77). Le second terme de (76) est identique à ce qui est fait ci-dessus pour la méthode de Newton, sauf qu'on linéarise autour d'un état de base $\mathbf{q}_b$ plutôt qu'une itération $\mathbf{q}_k$. Reste donc à expliciter le premier terme.

Termes fluides On rappelle que :

$$\mathcal{I}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left\{ J \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} \right\}$$

— **Dérivée par rapport aux variables fluides** : $\mathcal{I}^{\mathrm{f}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}})$ est linéaire en $\mathbf{u}, p$, on obtient donc immédiatement :

$$\left.\frac{\partial \mathcal{I}^{\mathrm{f}}}{\partial [\mathbf{u}, p]}\right|_{\mathbf{u},p} (\delta \mathbf{u}, \delta p) = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left\{ J \left.\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} - (\nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u}) \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} \right\}$$

Note : Dans le cas de l'analyse de stabilité, on linéarise autour d'un état $\mathbf{q}_b$ stationnaire donc on obtient simplement :

$$\left.\frac{\partial \mathcal{I}^{\mathrm{f}}}{\partial [\mathbf{u}_b, p_b]}\right|_{\mathbf{u}_b, p_b} (\mathbf{u}', p') = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} J_b \left.\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}}$$

où $J_b = J({\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_b)$

— **Dérivée par rapport aux variables de déplacement de l'extension** :

$$\left.\frac{\partial \mathcal{I}^{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}} \delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}} = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left\{ \delta J_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \delta \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}(\delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}) \left.\frac{\partial \delta \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} \right\}$$

Note : Dans le cas de l'analyse de stabilité, on linéarise autour d'un état $\mathbf{q}_b$ stationnaire donc on obtient simplement :

$$\left.\frac{\partial \mathcal{I}^{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_b} \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}\prime} = \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \left\{ - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_b) \boldsymbol{\Phi}({\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_b) \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}\prime}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{u}} \right\}$$

Terme solide et interface La dérivation est triviale pour $\mathcal{I}^{\mathrm{s}}(\theta_i, \mathbf{f})$ qui est linéaire en θ_i et $\mathbf{f}$. Pour le terme d'interface, on a simplement

$$\left.\frac{\partial \mathcal{I}^{\mathbf{u}}}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_i} \delta \theta_i = - \int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \left.\frac{\partial \delta \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\delta \theta_i)}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{f}}$$

Maintenant qu'on a explicité les termes de l'équation (76), on injecte la décomposition des variables perturbées en modes normaux dans (76) : $\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) e^{(\lambda + i\omega)t}$. Ainsi, on peut réécrire le problème sous une forme d'un problème quadratique aux valeurs propres :

$$
\begin{aligned}
(\lambda + i\omega)\left[\mathcal{L}_{\mathrm{ff}}(\hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{L}_{\mathrm{fe}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}})\right] + \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial[\mathbf{u},p]}\right|_{\mathbf{u}_b,p_b}(\hat{\mathbf{u}},\hat{p}) + \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_b}\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}} + \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial \mathbf{f}}\right|_{\mathbf{f}_b}\hat{\mathbf{f}} &= 0 \\
(\lambda + i\omega)^2\,\hat{\theta}_i + \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_{i,b}}\hat{\theta}_i + \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \mathbf{f}}\right|_{\mathbf{f}_b}\hat{\mathbf{f}} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_b}\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}} + \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\phi}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_b}\hat{\boldsymbol{\phi}} &= 0 \\
(\lambda + i\omega)\mathcal{L}_{\mathrm{is}}(\hat{\theta}_i) + \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}_b}\hat{\mathbf{u}} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_b}\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}} + \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_{i,b}}\hat{\theta}_i &= 0
\end{aligned}
$$

Où on a définit :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{ff}}(\hat{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} J_b \hat{\mathbf{u}} \cdot \check{\mathbf{u}} \\
\mathcal{L}_{\mathrm{fe}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}}) &= \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} -(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_b)\boldsymbol{\Phi}({\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_b)\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}} \cdot \check{\mathbf{u}} \\
\mathcal{L}_{\mathrm{is}}(\hat{\theta}_i) &= -\int_{\Gamma_{\mathrm{p},i}} \delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\hat{\theta}_i) \cdot \check{\mathbf{f}}
\end{aligned}
$$

Enfin, en définissant le mode normal de vitesse angulaire des plaques $\hat{\mathrm{v}}_{\theta_i}$, on peut réécrire ce problème comme un problème généralisé aux valeurs propre classique où les vecteurs propres s'écrivent $\hat{\mathbf{q}} = ([\hat{\mathbf{u}},\hat{p}],\hat{\theta}_i,\hat{\mathrm{v}}_{\theta_i},\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}},\hat{\mathbf{f}},\hat{\boldsymbol{\phi}})^T$:

$$
\mathbf{A}(\mathbf{q}_b)\hat{\mathbf{q}} + (\lambda + i\omega)\mathbf{B}(\mathbf{q}_b)\hat{\mathbf{q}} = 0 \tag{92}
$$

Où

$$
\mathbf{A}(\mathbf{q}_b) = \begin{pmatrix}
\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial[\mathbf{u},p]}\right|_{\mathbf{u}_k,p_k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_k} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{f}}}{\partial \mathbf{f}}\right|_{\mathbf{f}_k} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Id} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_{i,k}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{s}}}{\partial \mathbf{f}}\right|_{\mathbf{f}_k} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_k} & \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{\phi}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_k} \\
\left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}_k} & \mathbf{0} & \mathcal{L}_{\mathrm{is}}(\hat{\mathrm{v}}_{\theta_i}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_{i,k}} & \mathbf{0} & \left.\frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}\right|_{{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{f}}}_k} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{B}(\mathbf{q}_b) = \begin{pmatrix}
\mathcal{L}_{\mathrm{ff}}(\hat{\mathbf{u}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L}_{\mathrm{fe}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{f}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{Id} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Id} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{pmatrix}
$$

C Annexe : Symétries et équations linéarisées

Response Symmetries of a linear forced problem Let's consider first, as an archetype problem, the classical Linearized incompressible Navier-Stokes equations (no structure) in the form :

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} - \mathcal{A}(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}' = \boldsymbol{\Upsilon} \tag{93}$$

Suppose we have a base state $\mathbf{q}_b(x,y) = (u_b, v_b, p_b)^{\mathrm{T}}(x,y)$ with the following symmetry properties :

$$u_b(x,-y) = u_b(x,y) \tag{94}$$
$$v_b(x,-y) = -v_b(x,y) \tag{95}$$
$$p_b(x,-y) = p_b(x,y) \tag{96}$$

And define the symmetry operator $\mathcal{S}$ by its action on $\mathbf{q}$:

$$\mathcal{S}\mathbf{q}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u(x,y) + u(x,-y) \\ v(x,y) - v(x,-y) \\ p(x,y) + p(x,-y) \end{bmatrix} \tag{97}$$

Now, decompose the solution $\mathbf{q}$ as the sum of a symmetric and complementary part : $\mathbf{q}' = \mathbf{q}'_S + \mathbf{q}'_C$ where $\mathbf{q}'_S = \mathcal{S}\mathbf{q}'$ and $\mathbf{q}'_C = \mathbf{q}' - \mathcal{S}\mathbf{q}'$. Injecting this decomposition in (93) and composing the result by $\mathcal{S}$ on the left, one can obtain two separate problems :

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}'_S}{\partial t} - \mathcal{A}(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}'_S = \mathcal{S}\boldsymbol{\Upsilon} \tag{98}$$
$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}'_C}{\partial t} - \mathcal{A}(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}'_C = \boldsymbol{\Upsilon} - \mathcal{S}\boldsymbol{\Upsilon} \tag{99}$$

At the condition that :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}'_S &= \mathcal{A}(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}'_S \\ \mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}'_C &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{100}$$

Note : this condition is equivalent to the commutation of $\mathcal{A}(\mathbf{q}_b)$ and $\mathcal{S}$.

Thus, if the forcing term $\boldsymbol{\Upsilon}$ has the symmetry properties of the base flow (i.e. $\mathcal{S}\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{\Upsilon}$) then it only excites the symmetric problem and the solution is symmetric. On the contrary, if the forcing term has the complementary symmetries (i.e. $\mathcal{S}\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}$) then it only excites the complementary problem and the solution has only the complementary symmetries.

With the incompressible Navier-Stokes equations, condition (100) is verified. It also the case of the ALE equations.

Symmetries of the eigenmodes A similar property can be demonstrated for the symmetries of the eigenmodes of the eigenvalue problem :

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_b)\mathbf{q}' = \alpha\mathcal{B}\mathbf{q}' \tag{101}$$

Indeed, if $\mathbf{q}'$ is an eigenvector then, composing (101) on the right by $\mathcal{S}$, and assuming that $\mathcal{S}$ commutes with $\mathcal{A}(\mathbf{q}_b)$ (which is equivalent to (100)), we have :

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_b)\mathcal{S}\mathbf{q}' = \alpha\mathcal{B}\mathcal{S}\mathbf{q}' \tag{102}$$

Hence, $\mathcal{S}\mathbf{q}'$ is an eigenvector of the system with the same eigenvalue α as $\mathbf{q}'$. Suppose now that $\mathcal{A}(\mathbf{q}_b)$ has only simple eigenvalues. Then, we must have

$$\exists\beta \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \mathcal{S}\mathbf{q}' = \beta\mathbf{q}' \tag{103}$$

This means that $\mathbf{q}'$ is also an eigenvector of the symmetry operator associated to the eigenvalue β. Because $\mathcal{S}$ is actually a projector on the space of symmetric solutions, its eigenvalues are 0 or 1. If it is 1, $\mathbf{q}'$ is symmetric, if it is 0, $\mathbf{q}'$ is complementary. Thus the eigenvectors $\mathbf{q}'$ of (101) are symmetric or complementary (and nothing else ...)

Symmetries of the forcing term of the forced problem (78)

Applying this to the forced problem (78), we search the angles θ_i' that correspond to a symmetric or complementary forcing. Obviously, the intuition suggests that a symmetric forcing would be $\theta_1' = -\theta_2'$ and a complementary one would be $\theta_1' = \theta_2'$ We search for a condition on θ_1 and θ_2 which makes the forcing symmetric or complementary.

First write, in ALE formalism, we need to add the mesh displacement variables ξ and ψ to the state vector $\mathbf{q}(x,y) = (u,v,p,\xi,\psi)^{\mathrm{T}}(x,y)$, so that the symmetry operator $\mathcal{S}$ now writes :

$$\mathcal{S}\mathbf{q}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u(x,y)+u(x,-y) \\ v(x,y)-v(x,-y) \\ p(x,y)+p(x,-y) \\ \xi(x,y)+\xi(x,-y) \\ \psi(x,y)-\psi(x,-y) \end{bmatrix} \tag{104}$$

For the forced problem investigated in this section, the forcing is imposed by the displacement and velocity continuity conditions on $\Gamma_{\mathrm{p},i}$. Thus $\boldsymbol{\Upsilon}$ can be written as :

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\theta_i')}{\partial t}.\mathbf{e_x} \\ \frac{\partial\delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\theta_i')}{\partial t}.\mathbf{e_y} \\ 0 \\ \delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\theta_i').\mathbf{e_x} \\ \delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\theta_i').\mathbf{e_y} \end{bmatrix} \tag{105}$$

Thus,

$$\mathcal{S}\boldsymbol{\Upsilon}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial\delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},1}(\theta_1')}{\partial t}(x,y).\mathbf{e_x} + \frac{\partial\delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},2}(\theta_2')}{\partial t}(x,-y).\mathbf{e_x} \\ \frac{\partial\delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},1}(\theta_1')}{\partial t}(x,y).\mathbf{e_y} - \frac{\partial\delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},2}(\theta_2')}{\partial t}(x,-y).\mathbf{e_y} \\ 0 \\ \delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},1}(\theta_1')(x,y).\mathbf{e_x} + \delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},2}(\theta_2')(x,-y).\mathbf{e_x} \\ \delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},1}(\theta_1')(x,y).\mathbf{e_y} - \delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},2}(\theta_2')(x,-y).\mathbf{e_y} \end{bmatrix} \tag{106}$$

Given the definiton of $\delta\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{p},i}(\theta_i')$ (Annexe B and 4.3.1) depending whether we are on S_1, S_2 or S_3, in the following, we only write explicitely the equations for the case where we are on S_1 or S_2 (but the outcome is the same on S_3).

$$\forall(x,y) \in S_1 \cup S_2,$$

$$\mathcal{S}\boldsymbol{\Upsilon}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -(y-\frac{D}{2})\frac{\partial\theta_1'}{\partial t} + \left(-\left(-y+\frac{D}{2}\right)\frac{\partial\theta_2'}{\partial t}\right) \\ x\frac{\partial\theta_1'}{\partial t} - x\frac{\partial\theta_2'}{\partial t} \\ 0 \\ -(y-\frac{D}{2})\theta_1' + \left(-\left(-y+\frac{D}{2}\right)\theta_2'\right) \\ x\theta_1' - x\theta_2' \end{bmatrix} \tag{107}$$

Finally, we get the expected result :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{\Upsilon} &\iff \theta_1' = -\theta_2' \\ \mathcal{S}\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0} &\iff \theta_1' = \theta_2' \end{aligned} \tag{108}$$

Références

[Apelt and West, 1975] Apelt, C. J. and West, G. S. (1975). The effects of wake splitter plates on bluff-body flow in the range $10^4 < r < 5 \times 10^4$. part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 71 :145–160.

[Arcas and Redekopp, 2004] Arcas, D. and Redekopp, L. (2004). Aspects of wake vortex control through base blowing/suction. *Physics of Fluids*, 16 :452.

[Argentina and Mahadevan, 2005] Argentina, M. and Mahadevan, L. (2005). Fluid-flow-induced flutter of a flag. *PNAS*, 102(6) :1829–1834.

[Barkley, 2006] Barkley, D. (2006). Linear analysis of the cylinder wake mean flow. *EPL (Europhysics Letters)*, 75(5) :750.

[Bazilevs, 2007] Bazilevs, Y. (2007). Weak imposition of dirichlet boundary conditions in fluid mechanics. *Computers & Fluids*, 36(1) :12–26.

[Causin et al., 2005] Causin, P., Gerbeau, J., and Nobile, F. (2005). Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid–structure problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(42–44) :4506 – 4527.

[Chedevergne et al., 2006] Chedevergne, F., Casalis, G., and Féraille, T. (2006). Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection. *Physics of Fluids*, 18 :14103.

[Choi et al., 2008] Choi, H., Jeon, W.-P., and Jinsung, K. (2008). Control of flow over a bluff body. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 40 :113–139.

[De Langre et al., 2007] De Langre, E., Paidoussis, M., Doaré, O., and Modarres-Sadeghi, Y. (2007). Flutter of long fexible cylinders in axial flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 571 :371–389.

[Delaunay and Kaiktsis, 2001] Delaunay, Y. and Kaiktsis, L. (2001). Control of circular cylinder wakes using base mass transpiration. *Physics of Fluids*, 13 :3285.

[Donea et al., 2004] Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J.-P., and Rodríguez-Ferran, A. (2004). *Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods*. John Wiley & Sons, Ltd.

[Every et al., 1982] Every, M., King, R., and Weaver, D. (1982). Vortex-excited vibrations of cylinders and cables and their suppression. *Ocean Engineering*, 9(2) :135.

[Favier et al., 2009] Favier, J., Dauptain, A., Basso, D., and Bottaro, A. (2009). Passive separation control using a self-adaptive hairy coating. *Journal of Fluid Mechanics*, 627 :451–483.

[Fernández et al., 2007] Fernández, M. A., Gerbeau, J.-F., and Grandmont, C. (2007). A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(4) :794–821.

[Fernández and Moubachir, 2005] Fernández, M. A. and Moubachir, M. (2005). A Newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling. *Computers and Structures*, 83(2-3) :127–142.

[Fernández and Le Tallec, 2003] Fernández, M. and Le Tallec, P. (2003). Linear stability analysis in fluid–structure interaction with transpiration. part i : Formulation and mathematical analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(43) :4805 – 4835.

[Fish and Lauder, 2006] Fish, F. and Lauder, G. (2006). Passive and active flow control by swimming fishes and mammals. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 38(2) :193–224.

[Gerbeau and Vidrascu, 2003] Gerbeau, J.-F. and Vidrascu, M. (2003). A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37 :631–647.

[Giannetti and Luchini, 2007] Giannetti, F. and Luchini, P. (2007). Structural sensitivity of the first instability of the cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 581 :167–197.

[Hannoyer and Paidoussis, 1978] Hannoyer, M. and Paidoussis, M. (1978). Instabilities of tubular beams simultaneously subjected to internal and external axial flows. *Journal of Mechanical Design*, 100 :328–336.

[Hecht, 2012] Hecht, F. (2012). New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4) :251–265.

[Heil, 2004] Heil, M. (2004). An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid–structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1–2) :1 – 23.

[Heil et al., 2008] Heil, M., Hazel, A. L., and Boyle, J. (2008). Solvers for large-displacement fluid–structure interaction problems : segregated versus monolithic approaches. *Computational Mechanics*, 43(1) :91–101.

[Hirt and Nichols, 1981] Hirt, C. W. and Nichols, B. D. (1981). Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39 :201–225.

[Huerre and Monkevitz, 1990] Huerre, P. and Monkevitz, P. A. (1990). Local and global instabilities in spatially developping flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22 :473–537.

[Hémon, 2006] Hémon, P. (2006). *Vibrations des structures couplées avec le vent*. Mécanique. Les éditions de l'Ecole Polytechnique.

[Irwin, 2010] Irwin, P. (2010). Vortices and tall buildings : A recipe for resonance. *Physics Today*, 63(9) :68–69.

[Jackson, 1987] Jackson, C. (1987). A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 182 :23–45.

[Jacquin et al., 2005] Jacquin, L., Fabre, D., Sipp, D., and Coustols, E. (2005). Unsteadiness, instability and turbulence in trailing vortices. *Comptes Rendus Physique*, 6 :399–414.

[Le Pape et al., 2013] Le Pape, A., Lienard, C., and Bailly, J. (2013). Active flow control for helicopters. *AerospaceLab Journal*, 6 :1–11.

[Lehoucq et al., 1997] Lehoucq, R., Sorensen, D., and Yang, C. (1997). *ARPACK Users' Guide : Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*.

[Lozovskiy et al., 2015] Lozovskiy, A., Olshanskii, M. A., Salamatova, V., and Vassilevski, Y. V. (2015). An unconditionally stable semi-implicit {FSI} finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 297 :437 – 454.

[Manti č Lugo et al., 2014] Manti č Lugo, V., Arratia, C., and Gallaire, F. m. c. (2014). Self-consistent mean flow description of the nonlinear saturation of the vortex shedding in the cylinder wake. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :084501.

[Maxwell, 1873] Maxwell, J. C. (1873). *Essay for the Eranus Club on Science and Free Will*, chapter 14, pages 434–444. MacMillan and Co, London.

[Michelin et al., 2008] Michelin, S., Llewellyn Smith, S. G., and J., G. B. (2008). Vortex shedding model of a flapping flag. *J. Fluid Mech.*, 617 :1–10.

[Moubachir and Zolesio, 2006] Moubachir, M. and Zolesio, J. P. (2006). *Moving shape analysis and control : applications to fluid structure interactions*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Chapman & Hall/CRC, cop, Boca Raton.

[Navrose and Mittal, 2016] Navrose and Mittal, S. (2016). Lock-in in vortex-induced vibration. *Journal of Fluid Mechanics*, 794 :565–594.

[Osher and Fedkiw, 2003] Osher, S. and Fedkiw, R. P. (2003). *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Applied mathematical science. Springer, New York, N.Y.

[Paidoussis and Semler, 1993] Paidoussis, M. and Semler, C. (1993). Nonlinear dynamics of a fluid-conveying cantilevered pipe with an intermediate spring support. *Journal of Fluids and Structures*, 7(3) :269 – 298.

[Pedraglio, 2015] Pedraglio, S. (2015). Linear stability analysis in fsi problems including large displacements.

[Peskin, 1977] Peskin, C. (1977). Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, 25(3) :220–252.

[Peskin, 2002] Peskin, C. S. (2002). The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11 :479–517.

[Quarteroni, 2009] Quarteroni, A. (2009). *Numerical models for differential problems*. MS&A. Springer, Milan, Berlin, New York. Trad. de : Modellistica numerica per problemi differenziali.

[Raj and Harris, 1993] Raj, J. and Harris, B. (1993). Using surface transpiration with an euler method for cost-effective aerodynamic analysis. In *AIAA 24th Applied Aerodynamics Conference,*, pages 41–50.

[Rayleigh, 1883] Rayleigh, J. W. S. (1883). Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 14 :170–177.

[Reed et al., 1996] Reed, H., Saric, W., and Arnal, D. (1996). Linear stability theory applied to boundary layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28 :389–428.

[Richter, 2013] Richter, T. (2013). A fully eulerian formulation for fluid–structure-interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 233 :227 – 240.

[Richter, 2015] Richter, T. (2015). A monolithic geometric multigrid solver for fluid-structure interactions in ale formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104(5) :372–390. nme.4943.

[Roshko, 1961] Roshko, A. (1961). Experiments on the flow past a circular cylinder at very high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 10 :345–356.

[Russo et al., 1980] Russo, E., Loiacono, N., and Janna, W. (1980). Vortex shedding effects on offshore structure fatigue. *Engineering Structures*, 2(3) :147 – 149.

[Sipp et al., 2010] Sipp, D., Marquet, O., Meliga, P., and Barbagallo, A. (2010). Dynamics and control of global instabilities in open-flows : A linearized approach. *Applied Mechanics Reviews*, 63(3) :030801.

[Sreenivasan et al., 1987] Sreenivasan, K., Strykowski, P., and Olinger, D. (1987). Hopf bifurcation, landau equation, and vortex shedding behind circular cylinders. In *American Society of Mechanical Engineers, Fluids Engineering Division (Publication) FED*, volume 52, pages 1–13. ASME.

[Tallec and Mouro, 2001] Tallec, P. L. and Mouro, J. (2001). Fluid structure interaction with large structural displacements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24–25) :3039 – 3067. Advances in Computational Methods for Fluid-Structure Interaction.

[Taneda, 1956] Taneda, S. (1956). Experimental Investigation of the Wakes behind Cylinders and Plates at Low Reynolds Numbers. *Journal of the Physical Society of Japan*, 11 :302.

[Turek and Hron, 2006] Turek, S. and Hron, J. (2006). *Proposal for Numerical Benchmarking of Fluid-Structure Interaction between an Elastic Object and Laminar Incompressible Flow*, pages 371–385. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[Turek et al., 2010] Turek, S., Hron, J., Razzaq, M., Wobker, H., and Schäfer, M. (2010). *Numerical Benchmarking of Fluid-Structure Interaction : A Comparison of Different Discretization and Solution Approaches*, pages 413–424. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[Turek and Schäfer, 1996] Turek, S. and Schäfer, M. (1996). Benchmark computations of laminar flow around cylinder. In Hirschel, E., editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II*, volume 52 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 547–566. Vieweg.

[Williamson and Govardhan, 2004] Williamson, C. and Govardhan, R. (2004). Vortex-induced vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36 :413–455.

[Zdravkovic, 1981] Zdravkovic, M. (1981). Review and classification of various aero- and hydrodynamic means for suppressing vortex shedding. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 7 :145.

[Zebib, 1987] Zebib, A. (1987). Stability of a viscous flow past a circular cylinder. *Journal of Engineering Mathematics*, 21 :155–165.