

## PROPOSITION DE SUJET DE THESE

**Intitulé : Estimation d'indices de Sobol par échantillonnage préférentiel**

Référence : **SNA-DTIS-2024-19**  
(à rappeler dans toute correspondance)

**Début de la thèse** : Octobre 2024

**Date limite de candidature** : Juin 2024

### Mots clés

Quantification d'incertitudes, analyse de sensibilité, échantillonnage,

### Profil et compétences recherchées

Mathématiques appliquées, probabilités / statistiques

### Présentation du projet doctoral, contexte et objectif

De nombreux systèmes physiques sont schématiquement décrits par une relation du type  $Y = \phi(X)$ , où l'entrée  $X$  de dimension  $d$  est supposée aléatoire et de densité  $f$  et où la sortie  $Y$  est déterminée via la fonction déterministe  $\phi$ . Un exemple prééminent d'application est l'analyse d'un code de calcul boîte noire :  $\phi$  représente alors un code de calcul, tel que des calculs de contraintes sur des structures mécaniques complexes et  $X$  les conditions extérieures dans lesquelles ce calcul est effectué. On peut notamment penser à un code de type éléments finis, dont la complexité rend impossible toute étude analytique de la fonction  $\phi$  et donc de la sortie  $Y$ .

Une étape importante en quantification d'incertitudes concerne l'analyse de sensibilité dont l'objectif est de déterminer les composantes de l'entrée  $X$  qui influent le plus sur la sortie  $Y$  afin de, par exemple, réduire la dimension du modèle  $\phi$ . Un exemple relativement connu d'indice de sensibilité sont les indices de Sobol qui analysent la part de variance de  $Y$  issue des différentes composantes de  $X$  [1].

L'estimation des indices de Sobol peut être effectuée en utilisant la méthode pick-freeze [2] dont les propriétés statistiques de l'estimateur sont notamment étudiées dans [3]. Cependant, le nombre d'appels au modèle nécessaires à l'application de cette estimation est conséquent. À titre d'exemple, l'estimation de l'ensemble des indices de Sobol d'ordre un requiert  $N(d + 1)$  évaluations du modèle  $\phi$ . Dès lors, diverses méthodes reposant sur la construction d'un métamodèle ont été proposées pour réduire ce coût de simulation telles que [4] et [5] qui considèrent respectivement des modèles basés sur des développements en polynômes de chaos et des processus gaussiens.

Une approche très récente [6] d'estimation des indices de Sobol basée sur la méthode des rangs permet d'estimer l'ensemble des  $d$  indices de Sobol d'ordre 1 à l'aide d'un unique échantillon de taille  $N$  de  $X$  distribué selon  $f$ . L'efficacité de l'estimateur a notamment été étudié dans [7].

**L'objectif de la thèse est d'évaluer le couplage de ces estimateurs avec des approches par échantillonnage préférentiel.** L'échantillonnage préférentiel [8] est une technique d'estimation Monte-Carlo d'espérance très connue qui consiste à générer des échantillons de  $X$  non plus selon  $f$  mais selon une densité auxiliaire  $g$  et à considérer un estimateur de l'espérance avec un rapport de vraisemblance. Un bon choix de  $g$  permet ainsi de réduire fortement la variance par rapport à un estimateur de Monte-Carlo classique. On peut donc espérer une réduction de variance similaire pour l'estimateur de Sobol basé sur les rangs. L'échantillonnage préférentiel peut aussi être pertinent dans des situations dites « given data » pour estimer des indices de Sobol sous une distribution de  $X$  différente de celle disponible, si celle-ci est imposée par le contexte.

Une première étape de la thèse sera constituée d'une revue bibliographique sur l'analyse de sensibilité et l'échantillonnage préférentiel. Proposer un couplage innovant entre méthode

d'échantillonnage préférentiel et l'estimation d'un unique indice de Sobol sera le point prioritaire à traiter. Dans un second temps, en s'appuyant sur les travaux récents d'estimation d'espérance multiples [9], on pourra évaluer l'apport de l'échantillonnage préférentiel pour l'estimation de tous les indices avec un unique échantillon. Une application à la fiabilité pour laquelle l'échantillonnage préférentiel est particulièrement adapté, sera également envisagée.

- [1] Iooss, B., & Lemaître, P. (2015). A review on global sensitivity analysis methods. *Uncertainty management in simulation-optimization of complex systems: algorithms and applications*, 101-122.
- [2] Sobol, I. M. (2001). Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and computers in simulation*, 55(1-3), 271-280.
- [3] Gamboa, F., Janon, A., Klein, T., Lagnoux, A., & Prieur, C. (2016). Statistical inference for Sobol pick-freeze Monte Carlo method. *Statistics*, 50(4), 881-902.
- [4] Sudret, B. (2008). Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability engineering & system safety*, 93(7), 964-979.
- [5] Marrel, A., Iooss, B., Laurent, B., & Roustant, O. (2009). Calculations of Sobol indices for the Gaussian process metamodel. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(3), 742-751.
- [6] Gamboa, F., Gremaud, P., Klein, T., & Lagnoux, A. (2022). Global sensitivity analysis: A novel generation of mighty estimators based on rank statistics. *Bernoulli*, 28(4), 2345-2374.
- [7] Klein, T., & Rochet, P. (2023). Efficiency of the averaged rank-based estimator for first order Sobol index inference. *arXiv preprint arXiv:2306.05842*.
- [8] Bucklew, J. A., & Bucklew, J. (2004). *Introduction to rare event simulation (Vol. 5)*. New York: Springer.
- [9] Demange-Chryst, J., Bachoc, F., & Morio, J. (2023). Efficient estimation of multiple expectations with the same sample by adaptive importance sampling and control variates. *Statistics and Computing*, 33(5), 103.

#### **Collaborations envisagées**

ENAC

#### **Laboratoire d'accueil à l'ONERA**

Département : Traitement de l'Information et Systèmes

Lieu (centre ONERA) : Toulouse

**Contact** : Jérôme Morio

Tél. : 05 62 25 27 55 Email : [jerome.morio@onera.fr](mailto:jerome.morio@onera.fr)

#### **Directeur de thèse**

Nom : Paul Rochet

Laboratoire : ENAC

Tél. : 05 62 25 95 99

Email : [paul.rochet@enac.fr](mailto:paul.rochet@enac.fr)

Pour plus d'informations : <https://www.onera.fr/rejoindre-onera/la-formation-par-la-recherche>