

## PROPOSITION DE SUJET DE THESE

**Intitulé : Etude théorique et développement d'une méthode de maillage en hexagones pour la fabrication par impression 3D**

Référence : **SNA-DTIS-2026-31**  
(à rappeler dans toute correspondance)

**Début de la thèse :** Octobre 2026

**Date limite de candidature :** Octobre 2026

### Mots clés

Maillage, résolution des équations aux dérivées partielles, analyse géométrique

### Profil et compétences recherchées

Master 2 Université ou école d'ingénieur spécialisé en Mathématiques Appliquées et calcul scientifique

### Présentation du projet doctoral, contexte et objectif

Les méthodes d'impression 3D sont extrêmement utilisées pour la réalisation de pièces qui peuvent être support à des structures ou à assembler entre elles. Dans un soucis d'économie de matière et/ou de maîtrise du poids, elles sont généralement creuses. Toutefois, un profil complètement évidé ne serait pas suffisamment résistant donc l'intérieur est habituellement rempli par une structure dite « en nid d'abeilles », c'est-à-dire un maillage régulier constitué d'hexagones. Les arêtes de ces hexagones correspondent au chemin de dépôt de l'imprimante 3D. D'un point de vue pratique, cette étape de remplissage en « nid d'abeilles » est obtenue par intersection de la CAO (contours de la pièce) avec une trame uniforme. Les zones tronquées par cette intersection sont remplies avec de la matière. Ce processus n'est malheureusement pas optimal que ce soit du point de vue de la matière utilisée, du poids de la pièce ou encore de la teneur aux efforts à appliquer.

Parallèlement, on retrouve ce type de motifs dans le calcul scientifique avec le développement de méthodes numériques sur des maillages appelés « C-grid » et utilisés par exemple pour la simulation des équations de « shallow water » ou de propagation d'ondes de manière plus générale, sont souvent appliquées en météorologie et climatologie (WELLER, 2012) (GASSMANN, 2011). Ce type de maillage présente un motif en hexagone régulier, pouvant être vu comme les éléments duals d'un maillage en triangle de type Delaunay-Voronoi régulier (ie, la cellule est obtenue en reliant les centres de gravité des 6 triangles équilatères tournant d'un même sommet). Il est souvent utilisé pour construire une grille de calcul régulière adaptée aux représentations planes de la Terre car il permet de définir des schémas dits « géodésiques » de types différences finies plus adaptés aux systèmes étudiés que ceux utilisés sur maillages cartésiens usuels (THUBURN, 2008).

Dans une thèse récente effectuée à l'ONERA (DOTSE, 2024), nous avons montré théoriquement, et décliné en algorithmes, une manière de construire automatiquement des maillages en quadrillatères blocs-structurés sur des géométries 2D données. Cette méthode se base sur la construction, par résolution d'équations aux dérivées partielles, d'un champ de croix, ie d'un ensemble de vecteurs donnés en tout point du maillage modulo la relation de congruence définie par la rotation d'angle  $\pm\pi/2$ . L'intégration de lignes de champs dans le champ de croix permet alors de construire des sous-domaines dont nous démontrons qu'ils sont à 4 côtés. Ces sous-domaines sont finalement découpés pour obtenir le maillage bloc-structuré final.

L'objectif de cette thèse est d'étudier la modification de cette méthode de maillage par partitionnement à l'obtention de cellules hexagonales. Pour ce faire nous nous intéresserons dans un premier temps à la génération d'un champ de croix adapté à ce nouveau contexte, avec en particulier la définition du « bon champ de croix » et l'étude des différents types de singularités pouvant apparaître. L'étude de l'intersection des lignes de champs nous permettra de constituer le cadre théorique nécessaire à la démonstration de la convergence du processus complet. Enfin, une partie de la méthode repose sur l'équation permettant la construction, puis la correction, du champ de croix. En pratique nous utilisons une formulation en système d'ordre 1 de l'équation de Laplace, permettant d'introduire des conditions aux limites mixtes, associée à une

discrétisation par éléments finis mixtes (ARNOLD e BREZZI, 1985). Dans le cas de l'impression 3D, nous envisageons de modifier cette équation en un système d'élasticité linéaire permet d'introduire les paramètres d'élasticité du matériau. L'objectif de cette étape est d'adapter la forme des découpages construits aux lignes de forces correspondant à des efforts appliqués à la pièce considérée. Notre but serait ainsi d'essayer de produire des maillages adaptés à des contraintes prescrites tout en utilisant des mailles aussi grandes que possibles. La taille des mailles étant directement liée au nombre d'arêtes du maillage, leur diminution induit un gain à la fois en terme de matière déposée par l'imprimante 3D et donc de poids pour la pièce ainsi réalisée. De plus, outre l'étude des contraintes mécaniques, un autre aspect à prendre en compte est le parcours des « têtes d'impression ». Leur contrôle via le logiciel d'impression nécessite de suivre des chemins permettant des dépôts sans coupe et considère donc généralement les hexagones comme support extérieur d'un dépôt reliant les sommets selon plusieurs jeux de directions alternées. L'intégration de ce type de contrainte dans la construction du champ de croix et surtout dans le découpage final des cellules sera étudiée afin de produire un « chemin » compatible avec l'imprimante.

Le développement de ce travail s'appuiera sur le logiciel de maillage HQMesh développé à l'ONERA basé sur la méthode de construction de quadrilatères blocs-structurés.

## **BIBLIOGRAPHIE**

- ARNOLD, D. N.; BREZZI, F. Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates. **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, v. 19, n. 1, p. 7-32, 1985.
- DOTSE, K. M. **Création de maillages quadrillatéraux bloc structurés à partir de champ de croix prescrit et respectant les caractéristiques physiques d'une scène de calcul.** Doctorat de l'ISAE. Toulouse. 2024.
- GASSMANN, A. Inspection of hexagonal and triangular C-grid discretizations of the shallow water equations. **Journal of Computational Physics**, v. 230, p. 2706-2721, 2011.
- THUBURN, J. Numerical wave propagation on the hexagonal C-grid. **Journal of Computational Physics**, v. 227, p. 5836-5858, 2008.
- WELLER, H. Controlling the Computational Modes of the Arbitrarily Structured C Grid. **Monthly Weather Review**, v. 140, p. 3220-3234, 2012.

## **Collaborations envisagées**

Laboratoire de Mathématiques Appliquées à l'Aéronautique et au Spatial (LMA2S) et autres départements de l'Onera.

<b>Laboratoire d'accueil à l'ONERA</b> Département : Traitement de l'Information et Systèmes Lieu (centre ONERA) : Toulouse <b>Contact :</b> Vincent Mouysset Tél. : 05-62-25-26-72 Email : vincent.mouysset@onera.fr	<b>Directeur de thèse</b> Nom : Vincent Mouysset Laboratoire : ONERA Tél. : 05-62-25-26-72 Email : vincent.mouysset@onera.fr
--	--

Pour plus d'informations : <https://www.onera.fr/rejoindre-onera/la-formation-par-la-recherche>