

Commande à échantillonnage événementielle : cas non-linéaire

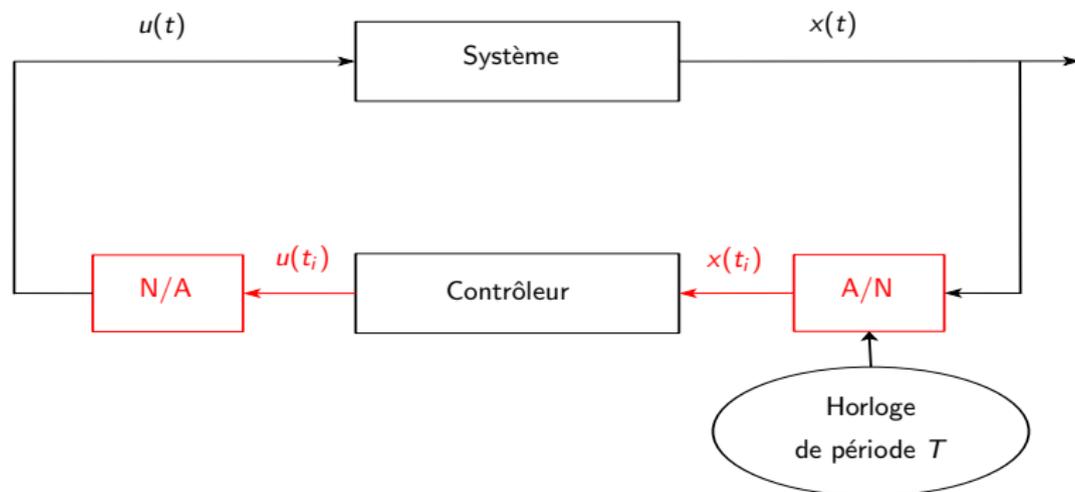
Romain Postoyan

CRAN, CNRS, Université de Lorraine - Nancy

romain.postoyan@univ-lorraine.fr



Introduction : commande numérique



Traditionnellement

$$\exists T > 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad t_{i+1} = t_i + T \quad (1)$$

Introduction : systèmes sous contraintes de ressources

- **Communication**

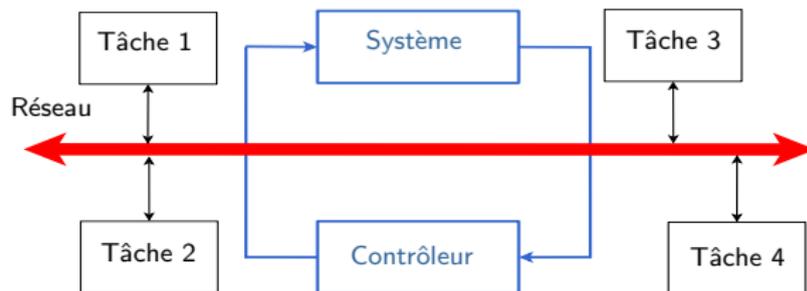


FIGURE : Système commandé par réseau

Introduction : systèmes sous contraintes de ressources (suite)

- **Calcul**

FIGURE : Système embarqué

Introduction : systèmes sous contraintes de ressources (suite)

- **Énergie**

FIGURE : Véhicule électrique

Introduction : idée

Adapter l'échantillonnage en fonction de l'état

(2)

Introduction : idée

Adapter l'échantillonnage en fonction de l'état

$$t_{i+1} = t_i + T \quad (2)$$

Introduction : idée

Adapter l'échantillonnage en fonction de l'état

$$\cancel{t_{i+1} = t_i + T} \longrightarrow t_{i+1} = t_i + T(x(t_i), x(t_{i+1})) \quad (2)$$

Introduction : cadre du cours

Système non-linéaire

$$\dot{x} = f(x, u)$$

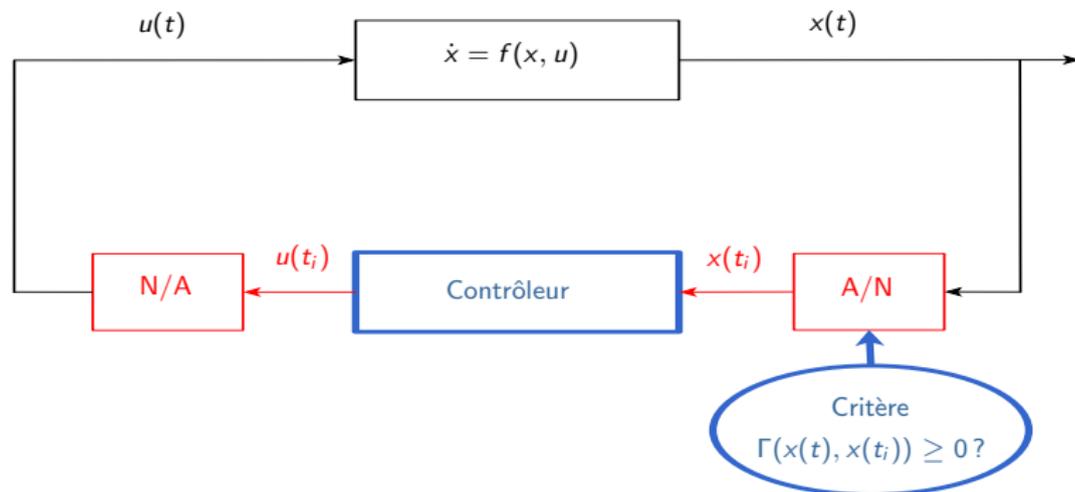
où

- $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$
- $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de commande, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$

« **Event-triggered control** »

Introduction : cadre du cours (suite)

« Event-triggered control »



Introduction : cadre du cours (suite)

Stabilisation de l'origine par retour d'état

- Pas de retour de sortie
- Pas de commande distribuée ou décentralisée
- Pas de poursuite de trajectoire
- Pas d'estimation
- Pas de commande optimale

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Plan

- 1 Introduction
- 2 **Préliminaires sur les systèmes non-linéaires**
 - Généralités
 - Quelques définitions et théorèmes
- 3 Revue des principales méthodes
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Plan

- 1 Introduction
- 2 **Préliminaires sur les systèmes non-linéaires**
Généralités
Quelques définitions et théorèmes
- 3 Revue des principales méthodes
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Pourquoi des systèmes non-linéaires ?

Exemples omniprésents en robotique, aéronautique, génie électrique, biologie, etc.

Exemple très simple

Équations de la dynamique d'un pendule*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{cases} \quad (3)$$

où

- $x_1 \in \mathbb{R}$ est l'angle
- $x_2 \in \mathbb{R}$ est la vitesse angulaire
- g est la constante de gravité
- k est le coefficient de frottement

Exemple très simple (suite)

Modèle

$$\dot{x} = f(x) \quad (4)$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix}$$

Exemple très simple (suite)

Modèle

$$\dot{x} = f(x) \quad (4)$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix}$$

Linéarisation autour de l'origine $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\dot{x} = Ax \quad (5)$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Differences with linear systems

Phenomena exclusively non-linear :

- Several isolated equilibrium points*
- Limit cycle
- Response to a periodic input

Solutions :

- No existence and uniqueness (in general)
- No analytical expression (in general)

Differences with linear systems

Phenomena exclusively non-linear :

- Several isolated equilibrium points*
- Limit cycle
- Response to a periodic input

Solutions :

- No existence and uniqueness (in general)
- No analytical expression (in general)

Différences avec les systèmes linéaires

Phénomènes exclusivement non-linéaires :

- Plusieurs points d'équilibre isolés*
- Cycle limite
- Réponse à une entrée périodique

Solutions :

- Pas d'existence et d'unicité (en général)
- Pas d'expression analytique (en général)

Differences with linear systems

Phenomena exclusively non-linear :

- Several isolated equilibrium points*
- Limit cycle
- Response to a periodic input

Solutions :

- Non-existence and non-uniqueness (in general)
- Non-analytical expression (in general)

Différences avec les systèmes linéaires

Phénomènes exclusivement non-linéaires :

- Plusieurs points d'équilibre isolés*
- Cycle limite
- Réponse à une entrée périodique

Solutions :

- Pas d'existence et d'unicité (en général)
- Pas d'expression analytique (en général)

Commande des systèmes non-linéaires

Pas de méthode générique de commande

Des méthodes sont disponibles pour des classes de systèmes données :

- Stabilisation locale à partir du linéarisé tangent
- Retour linéarisant
- Backstepping, feedforwarding
- Modes glissants
- Commande fondée sur la passivité
- etc.

Plan

- 1 Introduction
- 2 **Preliminaires sur les systemes non-lineaires**
 - Generalites
 - Quelques definitions et theoremes
- 3 Revue des principales methodes
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Stabilité : fonctions de comparaison

Définition* : fonctions de classes \mathcal{K} et \mathcal{K}_∞

Soit $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continue telle que $\alpha(0) = 0$:

- $\alpha \in \mathcal{K}$ si α est strictement croissante**
- $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ si $\alpha \in \mathcal{K}$ et $\alpha(s) \rightarrow \infty$ quand $s \rightarrow \infty$

Exemples :

- $s \mapsto s \in \mathcal{K}_\infty$
- $s \mapsto s^2 \in \mathcal{K}_\infty$
- $s \mapsto \arctan(s) \in \mathcal{K}$

Stabilité : fonctions de comparaison (suite)

Définition : fonctions de classe \mathcal{KL}

Soit $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continue, on dit que $\beta \in \mathcal{KL}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$
- Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\beta(s, \cdot)$ est décroissante et $\beta(s, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$

Exemple : $(s, t) \mapsto se^{-t}$

Stabilité : définition

Soit le système

$$\dot{x} = f(x) \quad (6)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $f(0) = 0$.

Définition (UGAS)

L'origine du système (6) est (uniformément) globalement asymptotiquement stable (UGAS) si

$$\exists \beta \in \mathcal{KL} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0 \quad |x(t)| \leq \beta(|x_0|, t).$$

Définition équivalente à la version « (ε, δ) »

Stabilité : caractérisation de Lyapunov

Théorème

L'origine du système (6) est UGAS si et seulement s'il existe une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad (7)$$

et

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq -\alpha_3(|x|) \quad (8)$$

Exemple* : $V(x) = x^T P x$ où $P = P^T > 0$

Stabilité entrée-état : définition

Soit le système

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (9)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ telle que $f(0, 0) = 0$.

Définition (ISS) [Sontag, IEEE TAC 1989]

Le système (9) est stable entrée-état (ISS) si¹

$$\exists \beta \in \mathcal{KL} \exists \delta \in \mathcal{K}_\infty \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \forall u \in \mathcal{L}_\infty \forall t \geq 0 \\ |x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) + \delta\left(\sup_{\tau \in [0, t]} |u(\tau)|\right).$$

1. $u \in \mathcal{L}_\infty$ si $|u(t)| < \infty$ for all $t \geq 0$.

Stabilité entrée-état : caractérisation de Lyapunov

Théorème [Sontag & Wang, SCL 1995]

Le système (9) est ISS si et seulement s'il existe une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ telles que pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m}$:

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad (10)$$

set

$$\langle \nabla V(x), f(x, u) \rangle \leq -\alpha_3(|x|) + \gamma(|u|). \quad (11)$$

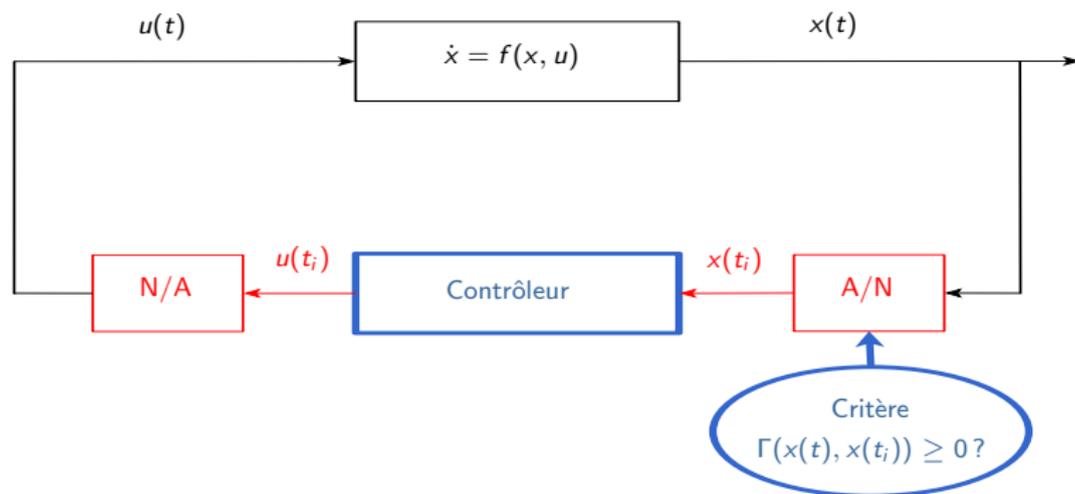
Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes**
 - Énoncé du problème
 - Approche
 - Seuil fixe
 - Seuil dépendant de l'état
 - Seuil dépendant de l'état et du temps
 - Discussions
 - Autres techniques
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes**
 - Énoncé du problème
 - Approche
 - Seuil fixe
 - Seuil dépendant de l'état
 - Seuil dépendant de l'état et du temps
 - Discussions
 - Autres techniques
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Rappel



Objectifs

- Stabilité de l'origine $x = 0$
- Existence d'un temps minimum (uniforme) entre deux instants d'échantillonnage

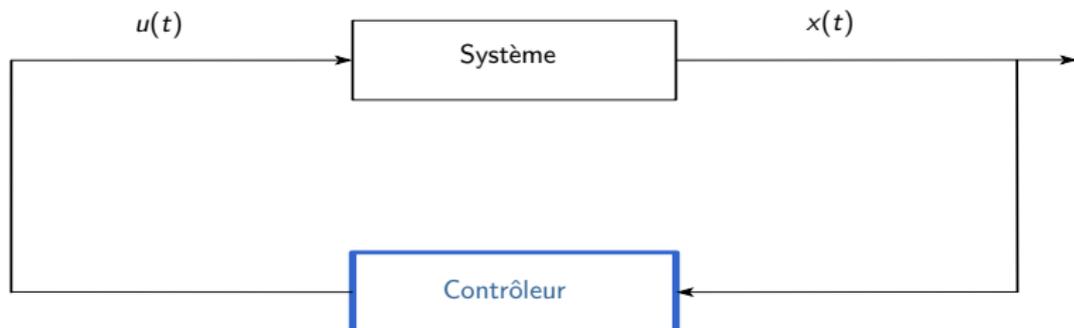
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0} \quad t_{i+1} - t_i \geq \varepsilon$$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 **Revue des principales méthodes**
 - Énoncé du problème
 - Approche**
 - Seuil fixe
 - Seuil dépendant de l'état
 - Seuil dépendant de l'état et du temps
 - Discussions
 - Autres techniques
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

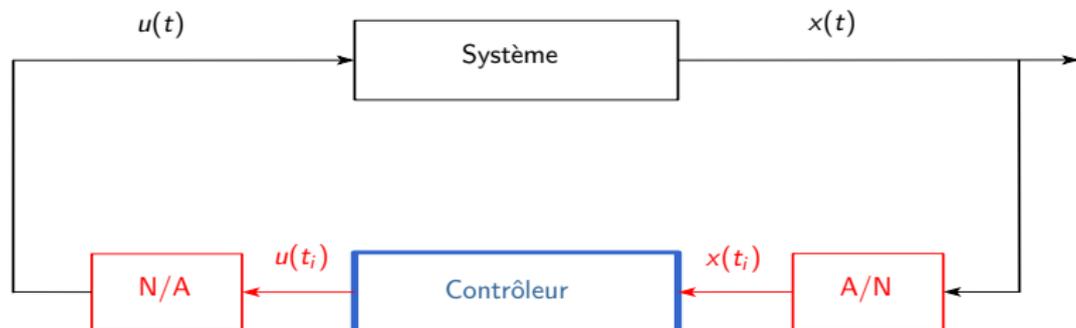
Émulation : les étapes

1. Construction de la loi de commande en ignorant l'échantillonnage



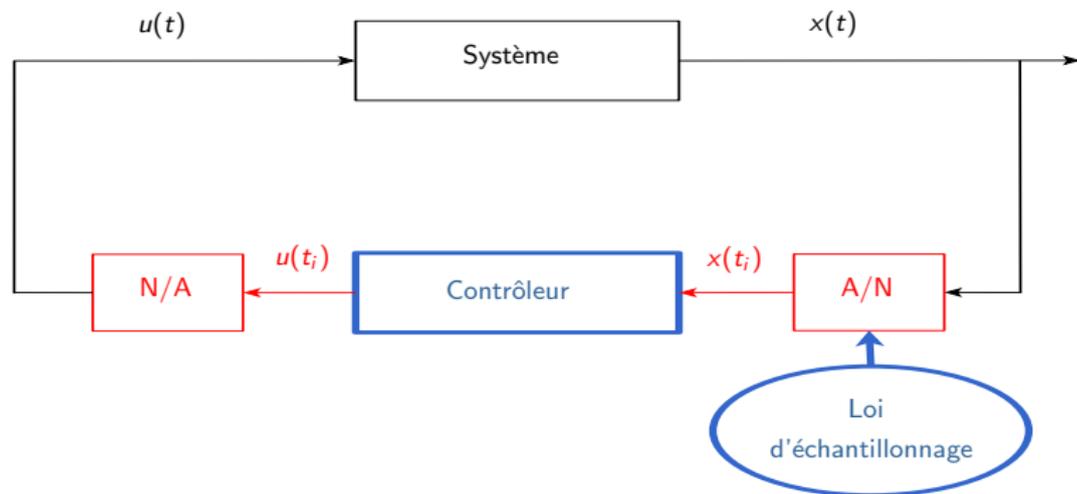
Émulation : les étapes (suite)

2. Prise en compte de l'échantillonnage et modélisation du système global



Émulation : les étapes (suite)

3. Synthèse de la loi de transmission



Émulation : les étapes (suite)

4. Analyse

- Stabilité
- Existence d'un temps minimum (uniforme) entre deux instants d'échantillonnage

Émulation : 1/ construction de la loi de commande

Soit le système

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (12)$$

où

- $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état
- $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de commande

Loi de commande :

$$u = k(x) \quad (13)$$

Boucle fermée :

$$\dot{x} = f(x, k(x)) \quad (14)$$

Émulation : 2/ prise en compte de l'échantillonnage et modèle*

Émulation : 2/ prise en compte de l'échantillonnage et modèle (suite)

Entre deux instants d'échantillonnage

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, k(x + e)) \\ \dot{e} &= -f(x, k(x + e))\end{aligned}\tag{15}$$

et après chaque échantillonnage

$$\begin{aligned}x^+ &= x \\ e^+ &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

Émulation : 2/ prise en compte de l'échantillonnage et modèle (suite)

Lien avec le cours de Luca Zaccarian

$$\begin{array}{l}
 \dot{x} = f(x, k(x+e)) \\
 \dot{e} = -f(x, k(x+e)) \\
 x^+ = x \\
 e^+ = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{e} \\ x^+ \\ e^+ \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 (x, e) \in C \\
 (x, e) \in D
 \end{array}
 \quad (17)$$

Pour plus de détails, cf. [Postoyan et al., IEEE TAC 2015; Seuret et al., IMA JMCI 2014]

Émulation : 3/ synthèse de la loi de transmission

Nous allons étudier plusieurs méthodes :

- ① Seuil fixe
- ② Seuil dépendant de l'état
- ③ Seuil dépendant de l'état et du temps
- ④ Seuil dépendant de l'état et horloge

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes**
 - Énoncé du problème
 - Approche
 - Seuil fixe**
 - Seuil dépendant de l'état
 - Seuil dépendant de l'état et du temps
 - Discussions
 - Autres techniques
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Seuil fixe : loi de transmission

Principe : transmettre uniquement lorsque

$$|x(t_i) - x(t)| = |e(t)| \geq \rho \quad \text{pour } t \geq t_i, \quad (18)$$

où $\rho > 0$ est un paramètre

[Arzén, IFAC WC 1999; Aström et Bernardsson, IFAC WC 1999; Kofman et Braslavsky, CDC 2006; Miskowicz, Sensors 2006; Otanez et al., ACC 2002, etc.]

Seuil fixe : hypothèses et analyse

Hypothèse 1 : ISS en continu

Le système $\dot{x} = f(x, k(x + e))$ ayant pour entrée e est ISS.

Développements*

Seuil fixe : hypothèses et analyse (suite)

Existence d'un temps minimum uniforme entre deux instants d'échantillonnage ?

Hypothèse 2

- f et k sont localement Lipschitziennes, $f(0,0) = 0$ et $k(0) = 0$

Preuve*

Seuil fixe : bilan

Hypothèses :

- Système bouclé continu ISS par rapport aux bruits de mesures
- Régularité de f et de la commande k

Propriétés :

- Stabilité globale uniforme et pratique (mais pas asymptotique)
- Existence d'un temps minimum semiglobalement uniforme

Seuil fixe : exemple /modèle

Compresseur d'un moteur d'avion [Krstić & P.V. Kokotović, CCA 1995]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\quad (19)$$

Loi de commande

$$u = k(x) = 4x_1 - 4x_2 - \frac{9}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_1^3 \quad (20)$$

Modèle échantillonné avec $e(t) = u(t_i) - u(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= u + e\end{aligned}\quad (21)$$

Seuil fixe : exemple /hypothèses

Vérification des hypothèses

- Système en x ISS

$$V : x \mapsto \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 3x_1)^2$$

$$\langle \nabla V(x), f(x, k(x) + e) \rangle \leq -\alpha(V(x)) + \gamma(|e|)$$

où

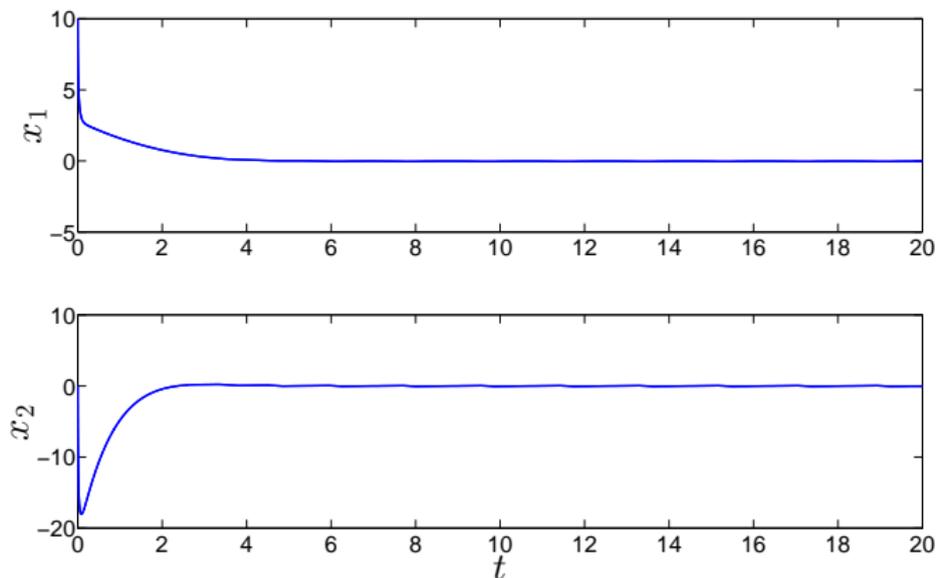
$$\gamma : s \mapsto 5.2591s^6 + 3.5797s^4 - 0.0032626s^3 + 4.6086s^2$$

- Régularité (f, k localement Lipschitziennes et $\gamma \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$)

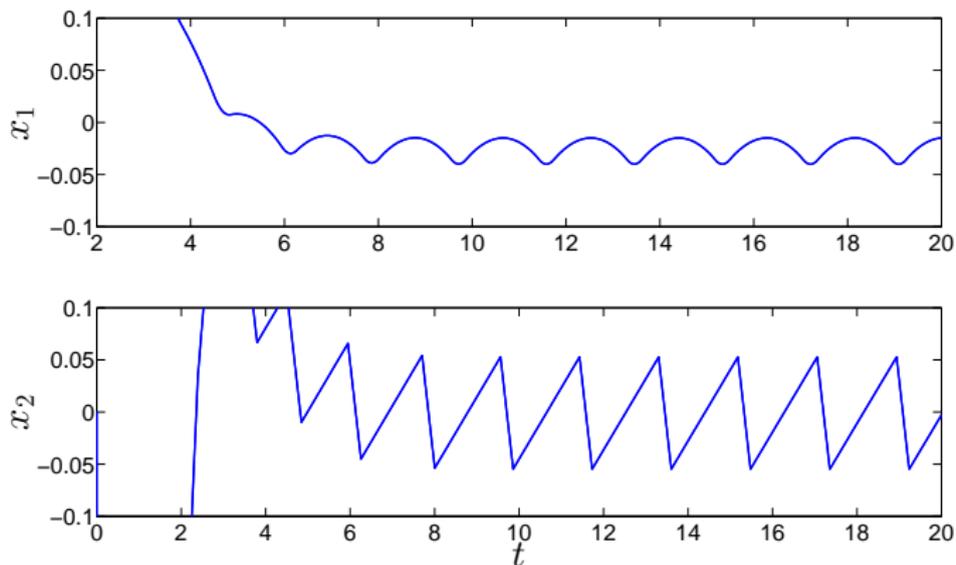
Loi de transmission $\gamma(|e|) \geq \rho$ où $\rho > 0$

Seuil fixe : exemple /simulations

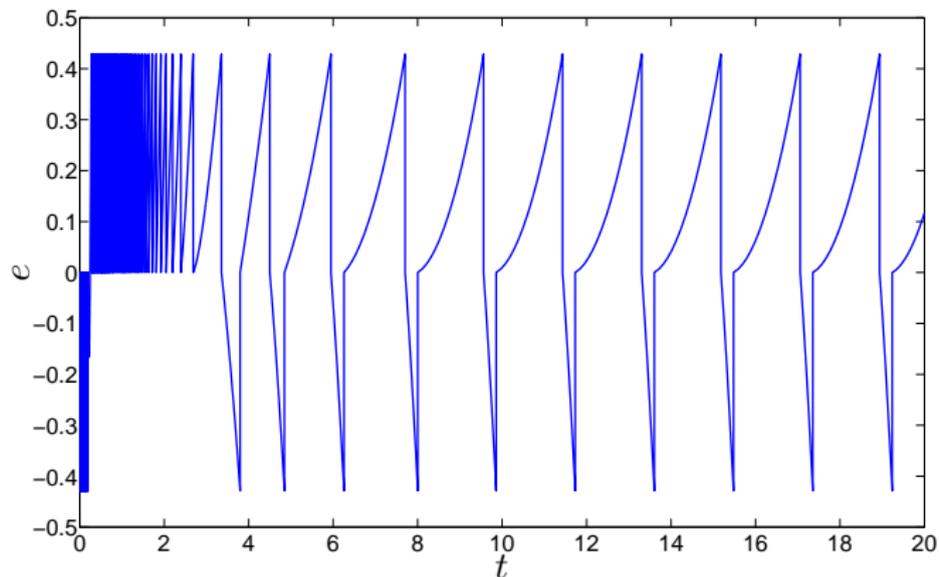
Simulation pour $\rho = 1$



Seuil fixe : exemple /simulations (suite)

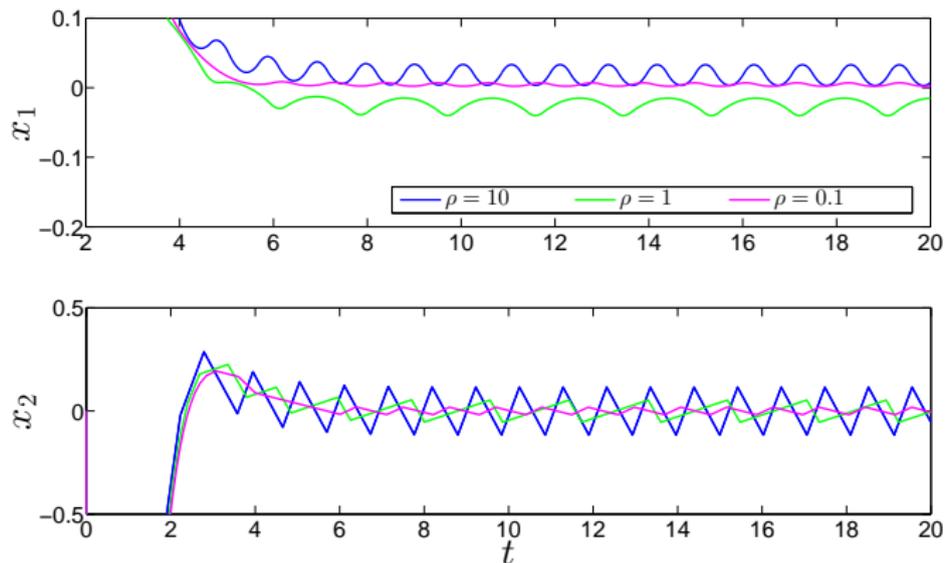
Simulation pour $\rho = 1$ (zoom)

Seuil fixe : exemple /simulations (suite)

Simulation pour $\rho = 1$ 

Seuil fixe : exemple /simulations (suite)

Simulation pour différentes valeurs de ρ



Seuil fixe : exemple /tableau

	$\rho = 10$	$\rho = 1$	$\rho = 0.1$
# moyen	718.2	1526	4419

TABLE : Nombre moyen d'instants d'échantillonnage pour 10 simulations telles que $x(0) \in [-10, 10]^2$ et $e(0) = 0$ sur un temps de 20 s.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 **Revue des principales méthodes**
 - Énoncé du problème
 - Approche
 - Seuil fixe
 - Seuil dépendant de l'état**
 - Seuil dépendant de l'état et du temps
 - Discussions
 - Autres techniques
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Seuil dépendant de l'état : loi de transmission

Idée : adapter le seuil ρ en fonction de l'état [Tabuada, IEEE TAC 2007]

Hypothèse 1 : ISS en continu

Le système $\dot{x} = f(x, k(x + e))$ ayant pour entrée e est ISS.

Seuil dépendant de l'état : loi de transmission (suite)*

Seuil dépendant de l'état : loi de transmission (suite)

Transmission dès que

$$\gamma(|e(t)|) = \sigma \alpha_3(|x(t)|)$$

où $\sigma \in (0, 1)$

La stabilité s'en suit directement

Seuil dépendant de l'état : analyse

Existence d'un temps minimum uniforme entre deux instants d'échantillonnage ?

Hypothèse 2

- f, k sont localement Lipschitziennes, $f(0, 0) = 0$ et $k(0) = 0$
- α_3^{-1}, γ sont localement Lipschitziennes

Preuve*

Seuil dépendant de l'état : exemple

Compresseur d'un moteur d'avion

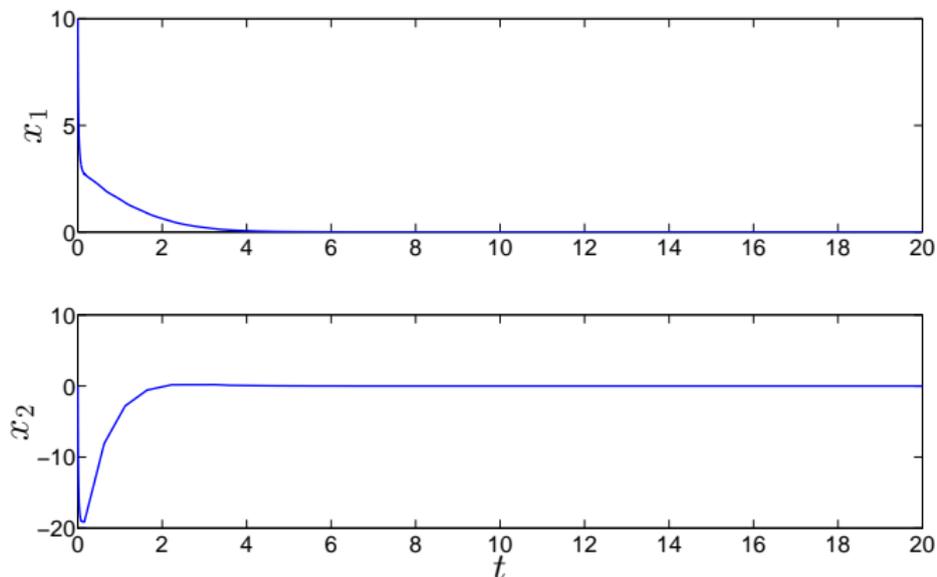
Hypothèses vérifiées

Loi de transmissions

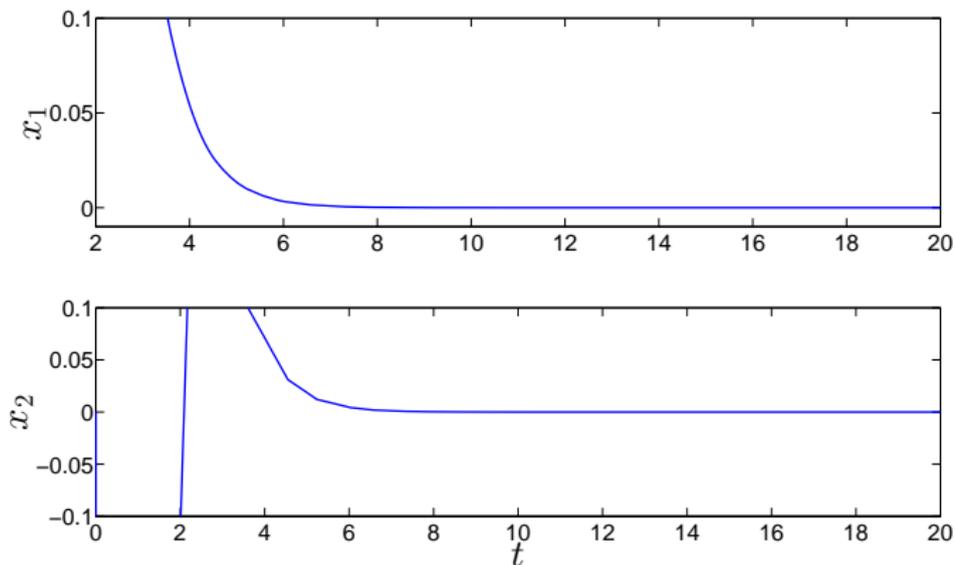
$$\gamma(|e(t)|) \geq \sigma \alpha_3(|x(t)|)$$

où $\sigma = 0.9$ et $e(t) = u(t_i) - u(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$

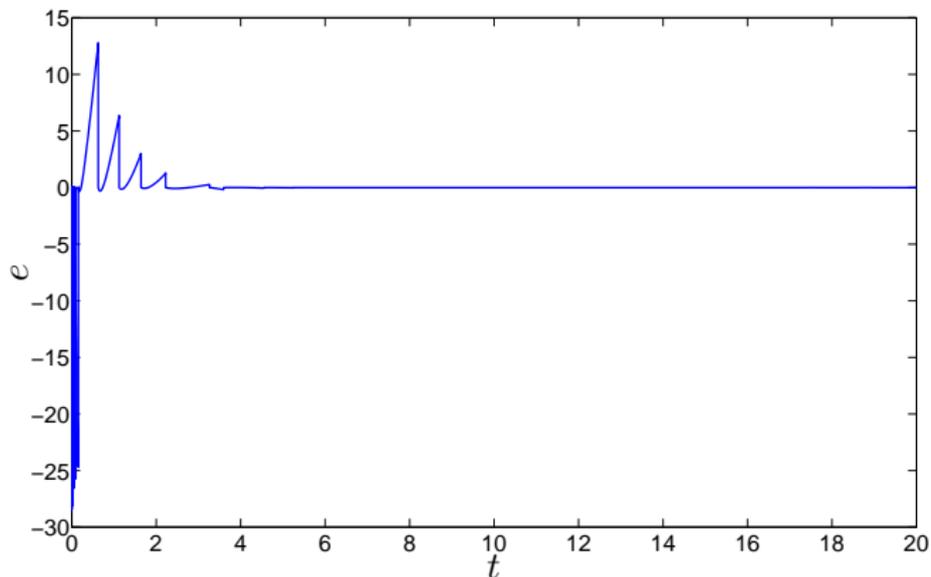
Seuil dépendant de l'état : exemple /simulations

Simulation pour $\sigma = 0.9$ 

Seuil dépendant de l'état : exemple /simulations (suite)

Simulation pour $\sigma = 0.9$ (zoom)

Seuil dépendant de l'état : exemple /simulations (suite)

Simulation pour $\sigma = 0.9$ 

Seuil dépendant de l'état : exemple /tableau

# moyen	Seuil dépendant de l'état	Seuil fixe		
	$\sigma = 0.9$	$\rho = 10$	$\rho = 1$	$\rho = 0.1$
	83.4	718.2	1526	4419

TABLE : Nombre moyen d'instants d'échantillonnage pour 10 simulations telles que $x(0) \in [-10, 10]^2$ et $e(0) = 0$ sur un temps de 20 s.

Seuil dépendant de l'état : bilan

Hypothèses :

- Système bouclé continu ISS par rapport aux bruits de mesures
- Régularité de f , k , γ et α_3^{-1}

Propriétés :

- Stabilité globale asymptotique
- Existence d'un temps minimum semiglobalement uniforme

Seuil dépendant de l'état : remarque

Idée :

$$\gamma(|e|) \leq \sigma \alpha_3(|x|) \Rightarrow \langle \nabla V(x), f(x, k(x+e)) \rangle \leq -(1-\sigma)\alpha_3(|x|) \quad (22)$$

Alternative : transmettre dès que

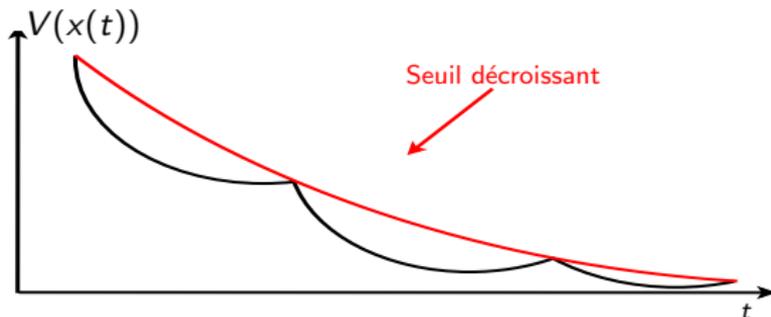
$$\langle \nabla V(x), f(x, k(x+e)) \rangle = -(1-\sigma)\alpha_3(|x|) \quad (23)$$

[Anta & Tabuada, IEEE TAC 2012; Seuret et al., IMA JMCI 2014;
Postoyan et al., IEEE TAC 2015]

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes**
 - Énoncé du problème
 - Approche
 - Seuil fixe
 - Seuil dépendant de l'état
 - Seuil dépendant de l'état et du temps**
 - Discussions
 - Autres techniques
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Seuil dépendant de l'état et du temps : idée



[Wang et Lemmon, Automatica 2011; Velasco et al., CDC 2009;
Postoyan et al., IEEE TAC 2015]

Seuil dépendant de l'état et du temps : loi de transmission

Hypothèse 1 : ISS en continu

Le système $\dot{x} = f(x, k(x + e))$ ayant pour entrée e est ISS.

Donc, en absence d'échantillonnage,

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), f(x, k(x)) \rangle &\leq -\alpha_3(|x|) \\ &\leq -\alpha_3 \circ \alpha_1^{-1}(V(x)) \\ &=: -\bar{\alpha}(V(x)) \end{aligned} \quad (24)$$

Soit $\eta \in \mathbb{R}$ ayant pour dynamiques

$$\dot{\eta} = -\sigma \bar{\alpha}(\eta) \quad \eta^+ = \eta \quad (25)$$

où $\sigma \in (0, 1)$

Seuil dépendant de l'état et du temps : loi de transmission (suite)

Système étendu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, k(x + e)) \\ \dot{e} &= -f(x, k(x + e)) \\ \dot{\eta} &= -\sigma \bar{\alpha}(\eta)\end{aligned}\tag{26}$$

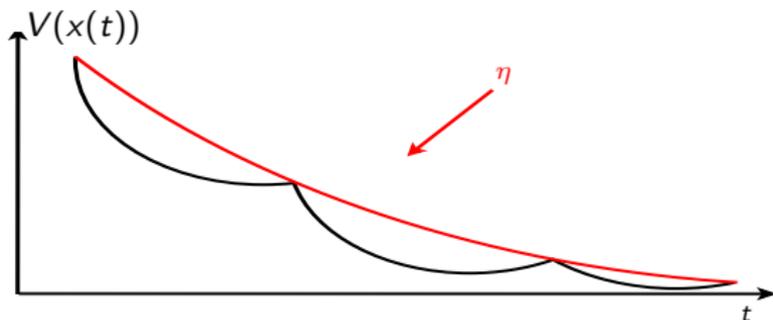
et

$$\begin{aligned}x^+ &= x \\ e^+ &= 0 \\ \eta^+ &= \eta\end{aligned}\tag{27}$$

Seuil dépendant de l'état et du temps : loi de transmission (suite)

Forcer $V(x) = \eta$

→ Transmission dès que $V(x) = \eta$



Seuil dépendant de l'état et du temps : analyse

Tableau*

Seuil dépendant de l'état et du temps : exemple

Compresseur de moteur d'avion

Seuil dépendant de l'état	Seuil dépendant de l'état et du temps
0.5030	0.4750

TABLE : Temps moyen entre deux transmissions pour 100 simulations sur un temps de 100 s [Postoyan et al., IEEE TAC 2015].

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes**
 - Énoncé du problème
 - Approche
 - Seuil fixe
 - Seuil dépendant de l'état
 - Seuil dépendant de l'état et du temps
 - Discussions**
 - Autres techniques
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Discussions : choix du bloqueur

Bloqueur d'ordre zéro

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x(t_i))) = f(x(t), k(\hat{x}(t)))$$

Discussions : choix du bloqueur

Bloqueur d'ordre zéro

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x(t_i))) = f(x(t), k(\hat{x}(t)))$$

Nous avons considéré

$$\dot{\hat{x}} = 0 \quad \hat{x}^+ = x \quad (28)$$

Discussions : choix du bloqueur

Bloqueur d'ordre zéro

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x(t_i))) = f(x(t), k(\hat{x}(t)))$$

Nous avons considéré

$$\dot{\hat{x}} = 0 \quad \hat{x}^+ = x \quad (28)$$

Autres choix possibles : bloqueur prédictif [Lunze & Lehmann, Automatica 2010]

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{u}) \quad \hat{x}^+ = x \quad (29)$$

(rappel : $\dot{x} = f(x, \hat{u})$)

Discussions : relâcher les hypothèses

ISS :

- Autre lois de transmission [Marchand et al., IEEE TAC 2013; Postoyan et al., IEEE TAC 2015; etc.]
- Poursuite de trajectoires d'un robot mobile [Postoyan et al., Automatica 2015]

Régularité pour l'existence d'un « dwell-time » :

- [Postoyan et al., IEEE TAC 2015]

Discussions : comparaison avec le périodique

Problème non-trivial :

- Difficile de déterminer une période d'échantillonnage stabilisante
- Difficile de comparer

Remarque : seuil dépendant de l'état + système scalaire linéaire \Rightarrow transmissions périodiques

Seuil dépendant de l'état et horloge : idée

Attendre T secondes avant d'évaluer la loi événementielle

[Forni et al., Automatica 2014; Tallapagada & Chopra, CDC 2012;
Abdelrahim et al., MTNS 2014]

Seuil dépendant de l'état et horloge : idée

Attendre T secondes avant d'évaluer la loi événementielle

[Forni et al., Automatica 2014; Tallapagrada & Chopra, CDC 2012;
Abdelrahim et al., MTNS 2014]

On introduit l'horloge

$$\dot{\tau} = 1 \quad \tau^+ = 0 \quad (30)$$

Seuil dépendant de l'état et horloge : idée

Attendre T secondes avant d'évaluer la loi événementielle

[Forni et al., Automatica 2014; Tallapagada & Chopra, CDC 2012; Abdelrahim et al., MTNS 2014]

On introduit l'horloge

$$\dot{\tau} = 1 \quad \tau^+ = 0 \quad (30)$$

Loi de transmission

$$\tau \geq T \quad \text{et} \quad \gamma(|e(t)|) \geq \sigma \alpha_3(|x(t)|) \quad (31)$$

où $T > 0$

Seuil dépendant de l'état et horloge : idée (suite)

[Abdelrahim et al., MTNS 2014]

- Déterminer $T \rightarrow$ [Nešić et al., IEEE TAC 2009]
⇒ hypothèses supplémentaires
- Preuve de stabilité

Seuil dépendant de l'état et horloge : exemple /modèle

Exemple linéaire [Tabuada, IEEE TAC 2007]

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (32)$$

Loi de commande

$$u = x_1 - 4x_2 \quad (33)$$

Seuil dépendant de l'état et horloge : exemple /modèle (suite)

Modèle du système à données échantillonnées

$$\dot{x} = (A + BK)x + BKe \quad (34)$$

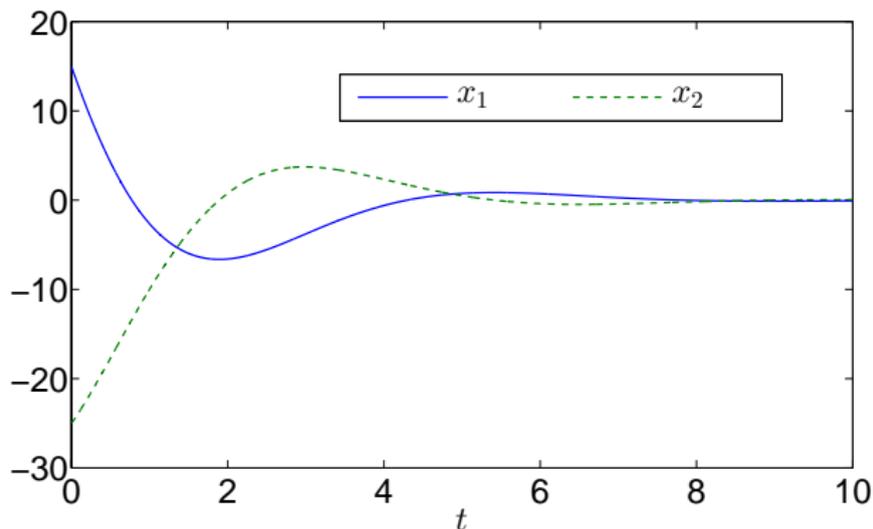
où $e = \hat{x} - x$

Hypothèses requises vérifiées

$$T = 0.0714$$

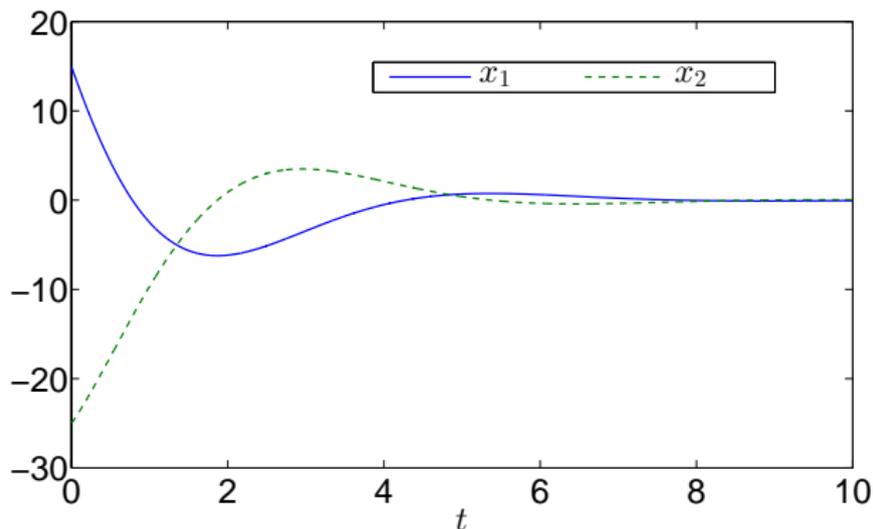
Seuil dépendant de l'état et horloge : exemple /simulations

Seuil dépendant de l'état



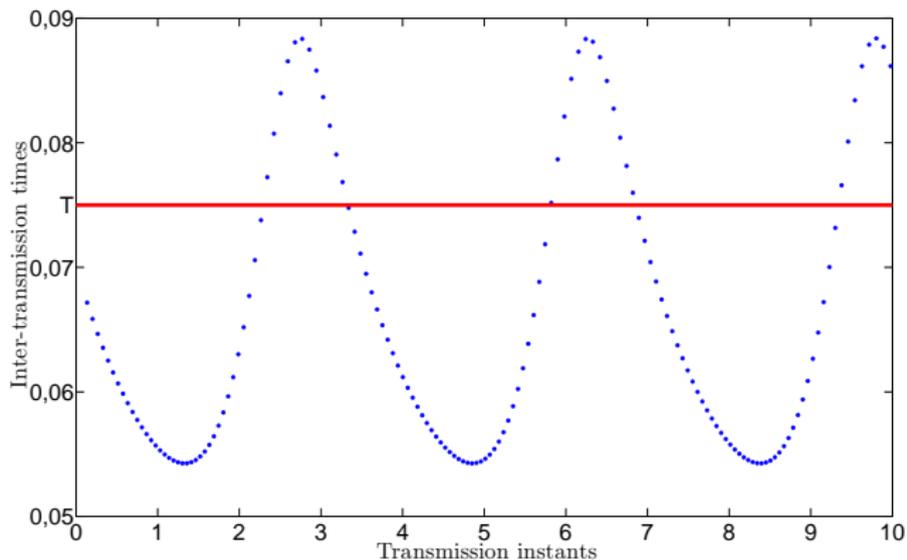
Seuil dépendant de l'état et horloge : exemple /simulations

Seuil dépendant de l'état et horloge



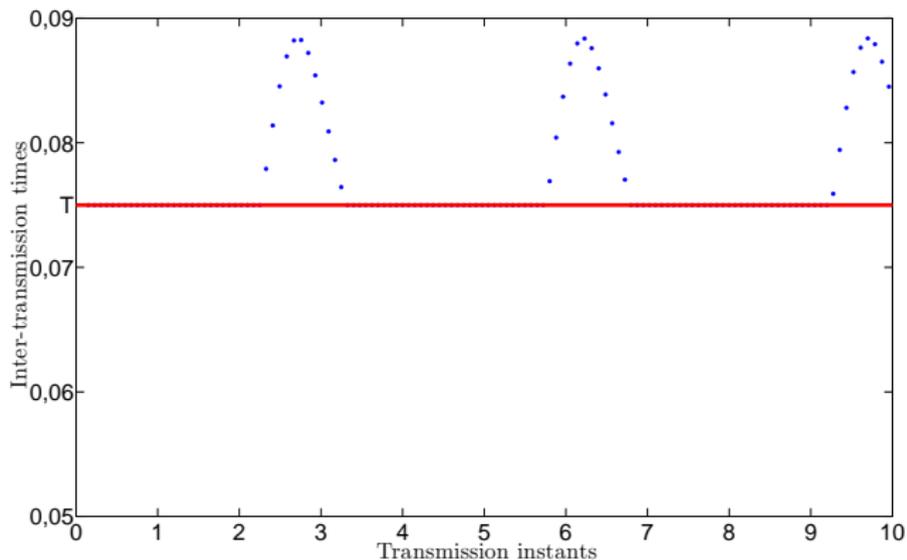
Seuil dépendant de l'état et horloge : exemple /simulations (suite)

Seuil dépendant de l'état



Seuil dépendant de l'état et horloge : exemple /simulations (suite)

Seuil dépendant de l'état et horloge



Seuil dépendant de l'état et horloge : exemple /simulations (suite)

	Seuil dépendant de l'état	Seuil dépendant de l'état et horloge
τ_{moyen}	0.0727	0.0778
τ_{min}	0.0192	$T = 0.0714$

TABLE : Résultats de 100 simulations telles que $x(0) \in [-100, 100]^2$ et $e(0) = 0$ sur un temps de 10 s.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes**
 - Énoncé du problème
 - Approche
 - Seuil fixe
 - Seuil dépendant de l'état
 - Seuil dépendant de l'état et du temps
 - Discussions
 - Autres techniques**
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions

Autres lois de transmissions

- [Girard, IEEE TAC 2015]
- [Postoyan et al., IEEE TAC 2015]
- [Marchand et al., IEEE TAC 2013]
- [Seuret et al., IMA JMCI 2014]
- [Liu & Jiang, Automatica 2015]
- etc.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes
- 4 Autres paradigmes**
 - « Periodic event-triggered control »
 - « Self-triggered control »
- 5 Conclusions

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes
- 4 Autres paradigmes**
 - << Periodic event-triggered control >>
 - << Self-triggered control >>
- 5 Conclusions

« Periodic event-triggered control » (PETC) : présentation

En « event-triggered control »

$$\Gamma(x(t_i), x(t)) \geq 0 ? \quad (35)$$

« Periodic event-triggered control » (PETC) : présentation

En « event-triggered control »

$$\Gamma(x(t_i), x(t)) \geq 0 ? \quad (35)$$

La plupart du temps en pratique

$$\Gamma(x(t_i), x(t_k)) \quad (36)$$

où t_k est une suite d'instants d'échantillonnage, $t_{k+1} = t_k + \theta$, $\theta > 0$

« Periodic event-triggered control » (PETC) : émulation

Modèle du système « event-triggered controlled »

$$\begin{array}{l}
 \dot{x} = f(x, k(x+e)) \\
 \dot{e} = -f(x, k(x+e)) \\
 x^+ = x \\
 e^+ = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{e} \\ x^+ \\ e^+ \end{array}} \right\} \begin{array}{l} (x, e) \in C \\ (x, e) \in D \end{array} \quad (37)$$

Théorème [Sanfelice & Teel, CDC 2006]

Si

- f, k sont continus
- C et D sont fermés**
- Stabilité globale asymptotique d'un ensemble compact \mathcal{A}

Alors \mathcal{A} est semiglobalement pratiquement stable par rapport à θ (suffisamment petit) pour le système PETC correspondant.

« Periodic event-triggered control » (PETC) : présentation

Questions :

- Comment sélectionner θ ?
- Préservation exacte des propriétés de l'« event-triggered control »

$$\bar{\Gamma}(x(t_i), x(t_k)) \leq 0 \Rightarrow \Gamma(x(t_i), x(t)) \leq 0 \quad (38)$$

Une méthode proposée dans [Heemels et al., CRC Press / Taylor & Francis 2015]

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes
- 4 Autres paradigmes**
 - « Periodic event-triggered control »
 - « Self-triggered control »
- 5 Conclusions

« Self-triggered control » (STC)

Déterminer à l'instant t_i le prochain instant d'échantillonnage t_{i+1}

Méthode générale dans [Anta & Tabuada, IEEE TAC 2012]

Plan

- 1 Introduction
- 2 Préliminaires sur les systèmes non-linéaires
- 3 Revue des principales méthodes
- 4 Autres paradigmes
- 5 Conclusions**

Conclusions

- Principe de la commande à échantillonnage événementielle
- Principales lois de transmissions en non-linéaire
- Comparaison des techniques sur un exemple
- Quelques mots sur PETC et STC

Références générales : [Heemels et al., CDC 12; Postoyan et al., IEEE TAC 2015]