

# Prise en compte des contraintes de communication

Samson Lasaulce & Sophie Tarbouriech

LSS & LAAS-CNRS

17 juin 2015

# Outline

- 1 Objectifs du cours
- 2 Qu'est-ce qu'un systèmes à information limitée
- 3 Quelques éléments pris en compte
- 4 Quelques applications
- 5 Focus sur les systèmes quantifiés

## Thématique :

La thématique concerne l'étude des systèmes dynamiques soumis à des contraintes de communication ou encore à des informations limitées.

C'est un sujet *à la frontière entre théorie de la commande et théorie de l'information/communication numérique.*

C'est pourquoi nous allons aborder les deux facettes suivantes :

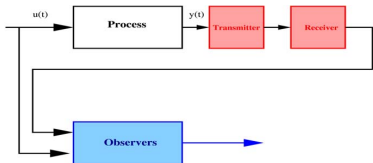
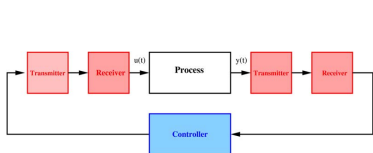
- Comment le problème est étudié d'un point de vue de la théorie de l'information/communication numérique (Samson Lasaulce)
- Comment le problème est étudié d'un point de vue de la théorie de la commande (Sophie Tarbouriech)

## Motivations.

- Emergence de réseaux en tous genre (réseaux de capteurs, systèmes contrôlés en réseau, réseaux de communications, réseaux sociaux, réseaux de distribution d'énergie intelligents, etc) qui sont bâtis sur des liens de communications,
- Le développement d'une méthodologie de travail à l'interface de l'automatique et des communications n'est plus un luxe mais une nécessité.

Ce cours vise à donner des bases sur le problème de la quantification d'une source d'information (en vue de sa transmission) et de ses liens avec les problèmes de commande.

- **Objectif général.** Problème de commande et d'observation en tenant compte des éléments de communication, tels que les émetteurs et les receveurs :



- ▷ Modélisation des émetteurs et des receveurs : fonctions non-linéaires.

$$q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow T_1 \times T_2$$
$$(x(t), t) \rightarrow q(x(t_k), t_k)$$

- ▷ Nécessité de définir des mesures spécifiques de la qualité de la communication (type d'information, entropie, distorsion...)

- **Objectif.** Revisiter les problèmes issus de la théorie de l'information via leurs liens avec la théorie de la commande.
  - ▷ Systèmes de contrôle avec de multiples actionneurs et capteurs géographiquement distribués
  - ▷ Comment chacun des éléments communique avec les autres ?
  - ▷ Prendre en compte les divers phénomènes : retards de transmission, pertes de paquets, structure des données, réseaux numériques → **quantification en espace et en temps**, ...
- **Quelques exemples.** Asservissement visuels (Sharon et al., 2010), Lazy sensors (Forni et al., 2010), la régulation des gènes en biologie (Kitano, 2002).

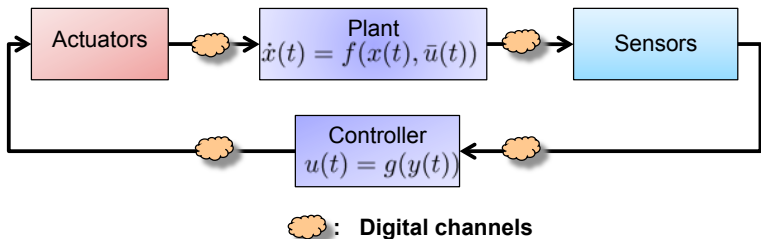
- **Etude (cadre projet Limicos).** Nous voulons nous focaliser sur deux types d'éléments d'information : quantification en espace et en temps.
  - ▷ Quantification en espace : conversion du signal (à valeur réelle) en un signal constant par morceaux prenant des valeurs dans un ensemble fini.
  - ▷ Quantification en temps : conversion du signal (à valeur réelle) en un signal constant par morceaux prenant des valeurs dépendant des instants d'échantillonnages.
- **Objectifs.** Determiner des classes de modèles permettant de caractériser ces phénomènes pour pouvoir développer des résultats originaux sur les problèmes imbriqués d'observation/stabilisation
  - ▷ Classes de systèmes : linéaires et non-linéaires (non-linéarité isolées, affine en la commande) utilisant un nombre fini de valeurs de commande fixées et un nombre fini de niveaux de mesure.

## Quelques références

- Elia and Mitter, 2001, étudient la façon de construire les émetteurs et receveurs dans un contexte de contrôle.
- Nous ne voulons pas aborder ces systèmes sous l'angle quantité d'information finie (liée au débit) (Tatikonda and Mitter, 2004) ou sous l'angle de la nature stochastique du lien (Matveev and Savkin, 2009)
  - ▷ Nous voulons considérer les émetteurs/receveurs dans un sens large.
- Voir aussi les travaux plus récents qui réadaptent les schémas de commandes avancées (Liberzon, 2003), (Bullo and Liberzon, 2006), (Fu and Xie, 2005), (Gao and Chen, 2008), (Kameneva and Netic, 2008), (Cepeda and Astolfi, 2008), (Vu and Liberzon, 2008), (Corradini and Orlando, 2008).



Suite de l'exposé : Prise en compte de la présence d'éléments de calcul et/ou de communication ([Samson](#)) dans la boucle de commande ([Sophie](#)):



**JDMACS, Bourges, France**

# **Part I : Elements of communication theory**

Sophie Tarbouriech and Samson Lasaulce

LAAS & L2S

lasaulce@lss.supelec.fr

April 17, 2015

# Outline

---

- 0. Introduction
- 1. Source coding
- 2. Channel coding

# Elements of communication theory

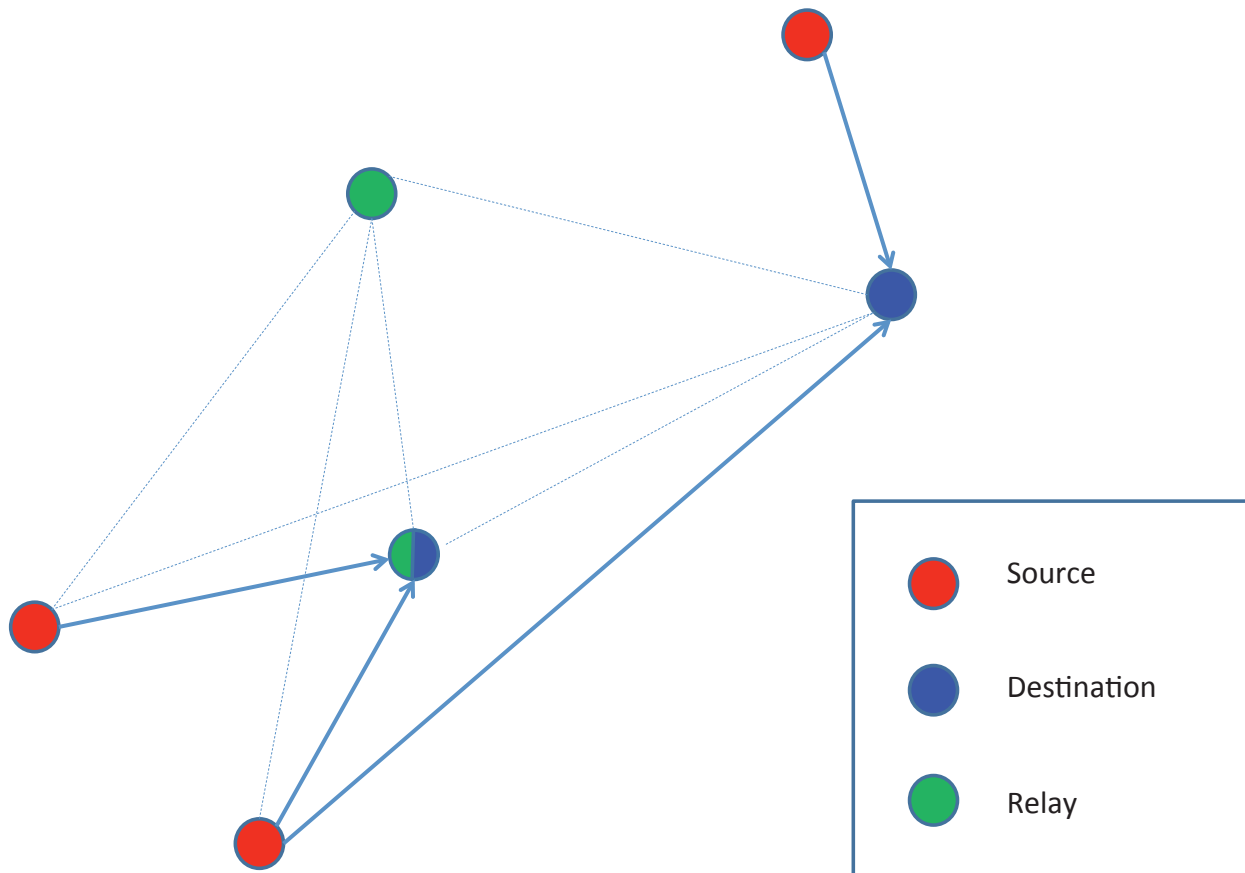
---

## Introduction

# Introduction (1/6)

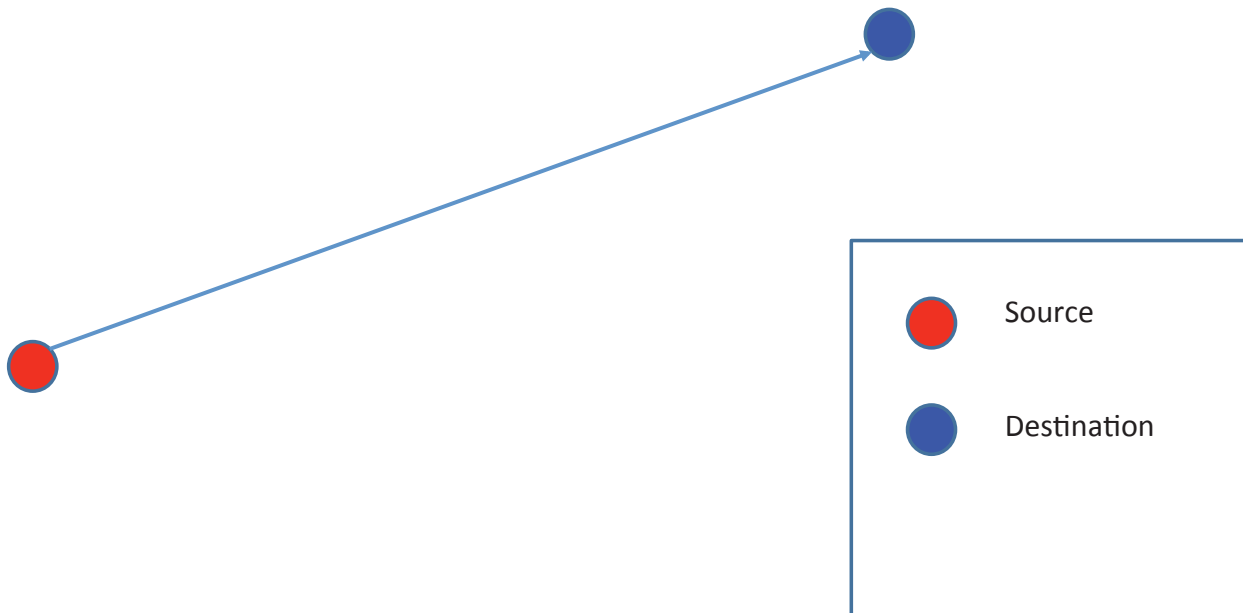
---

- Focus on the special case of point-to-point communications.



# Introduction (2/6)

---



# Introduction (3/6)

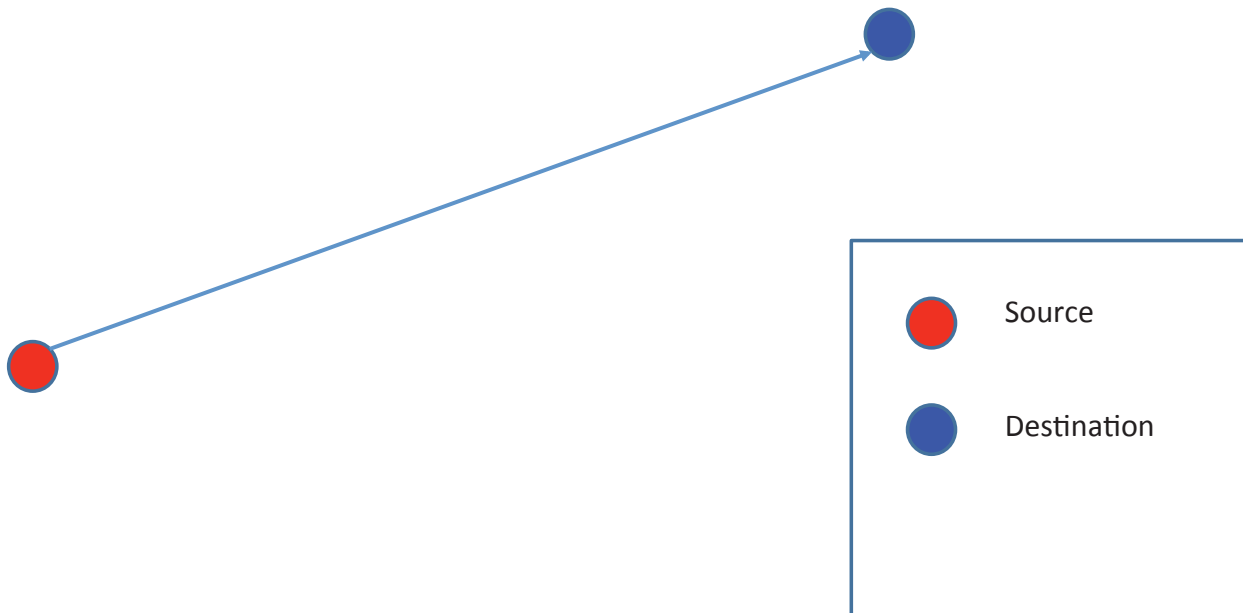
---

## Take away messages

- Quantization in the transmission chain.
- Typical features of a transmission chain: non-linearity, delay, stochastic nature (source and channel), etc.
- Notions of entropy and capacity.
- Notions of communication constraints.

# Introduction (4/6)

---

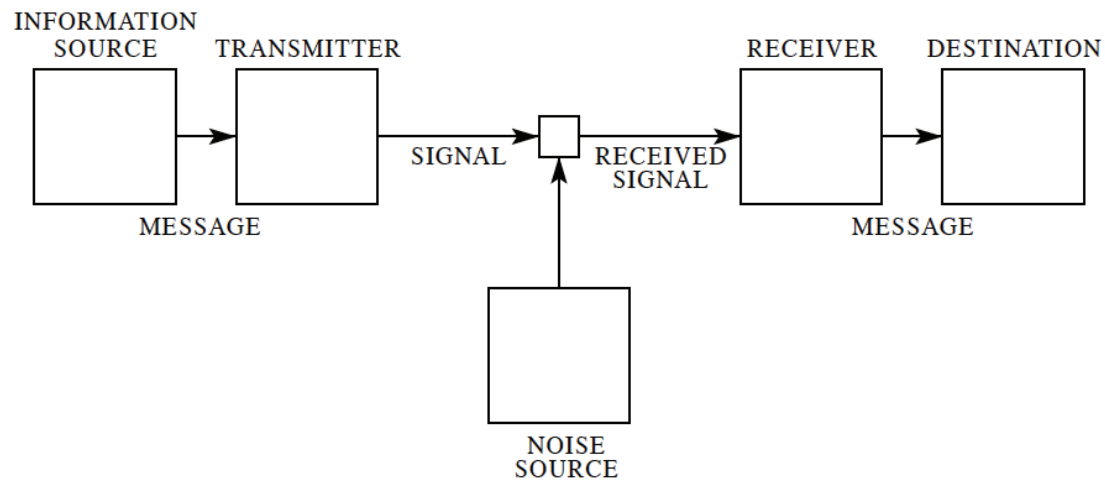




# Introduction (5/6)

---

## The Shannon paradigm [Shannon 1948]



## Introduction (6/6)

---

- Transmitter = source coder + channel coder.
- Receiver = channel decoder + source decoder.
- Remark: general structure = joint source-channel coding.

# Elements of communication theory

---

Source coding

# Classification of source coders

---

Lossless source coding.

Lossy source coding.

# Lossless source coding

---

## Example

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

How many bits do you need to describe this information source?

# Entropy

---

## Definition

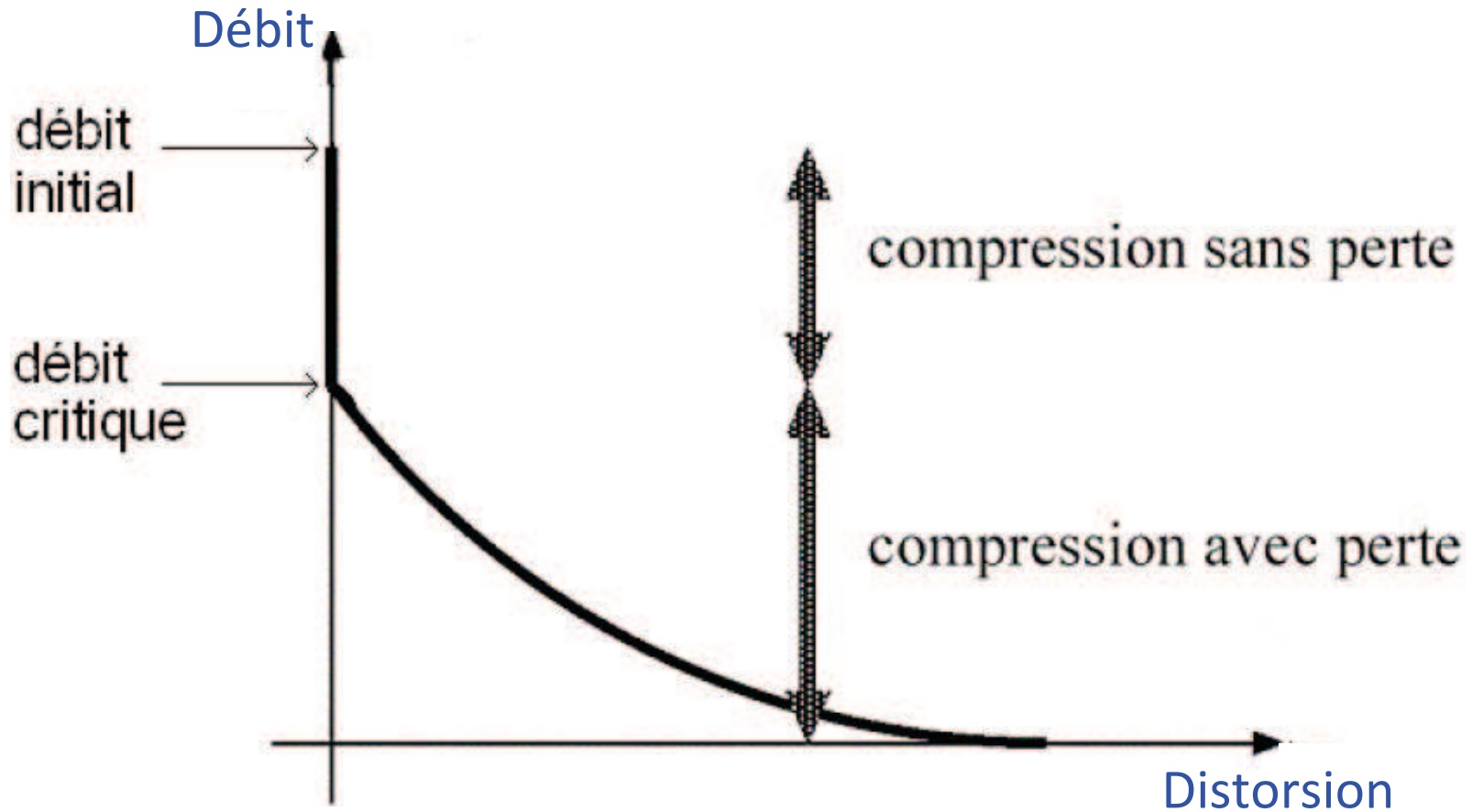
$$H(X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log_2 p(x)$$

## Back to the example

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{0.9, 0.04, 0.04, 0.02\}$$

$$H(X) = \sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i \simeq 0.62 \text{ bit/symbol.}$$

# Lossless versus lossy



# Quantization: standard definitions [Cover 2006]

---

□ Quantization = special case of lossy source coding.

□ Coding function (CAN, partition)

$$\begin{aligned} f : \quad \mathcal{X}^n &\rightarrow \{1, \dots, M\} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto m \end{aligned}$$

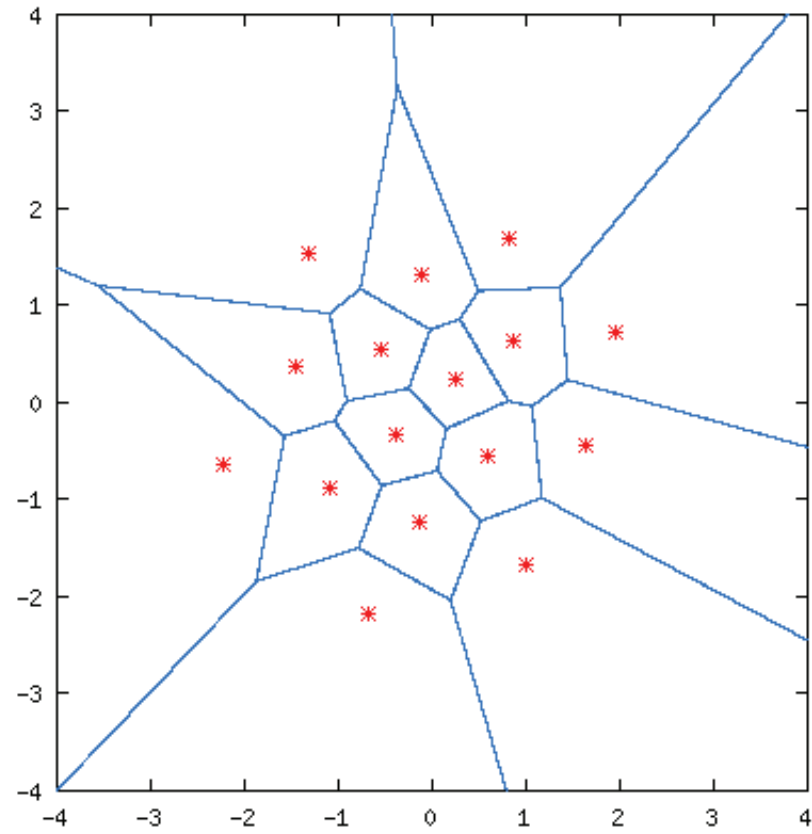
□ Decoding function (CNA, representatives)

$$\begin{aligned} g : \quad \{1, \dots, M\} &\rightarrow \hat{\mathcal{X}}^n \\ m &\mapsto (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \end{aligned}$$



# Partition and representatives: illustration for $n = 2$

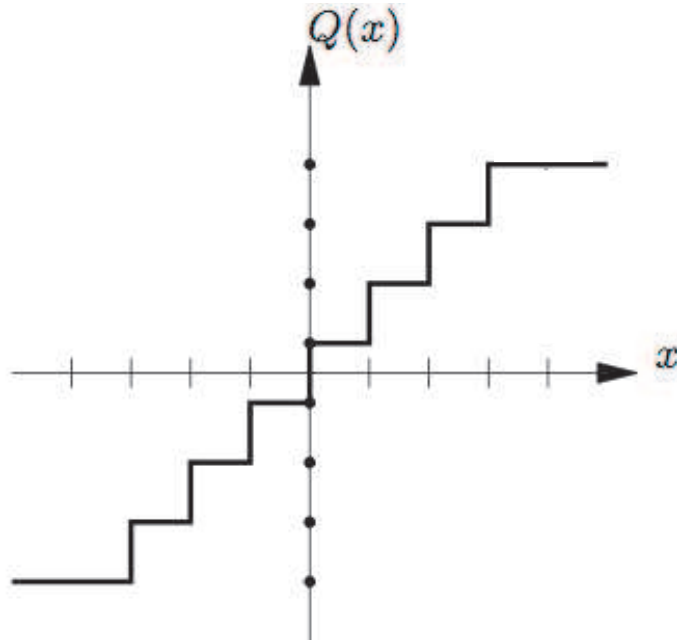
---



# Comments

---

□  $Q = g \circ f.$



□ With a channel:  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow m \rightarrow \tilde{m} \rightarrow (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n).$

# Quantization standard performance criteria

---

Source coding rate

$$R = \frac{\log_2 M}{n}$$

Distortion

$$D = \int_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) \|x - Q(x)\|^2 dx = \sum_{m=1}^M \int_{\mathcal{R}_m} p(x) \|x - \hat{x}_m\|^2 dx$$

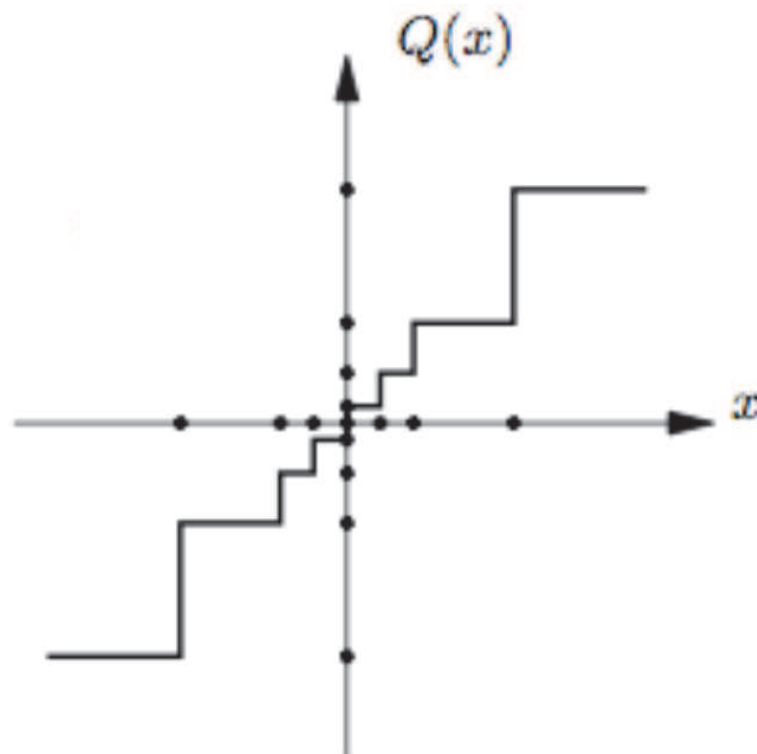
Example. High resolution uniform scalar quantization

$(n = 1, M \gg 1)$ :  $D \simeq \frac{q^2}{12} = k \times 2^{-2R}$ .

# Comments

---

- Scalar/vector quantization, uniform/non-uniform quantization, low/high resolution quantization.



# Elements of communication theory

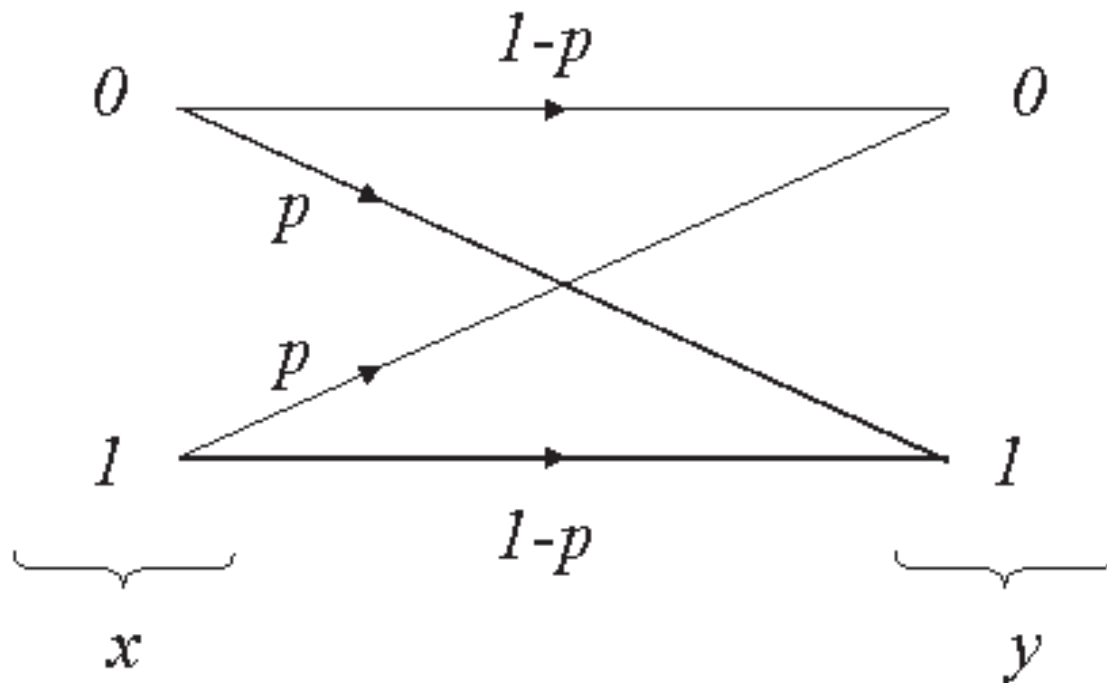
---

## Channel coding

## Fighting against noise

---

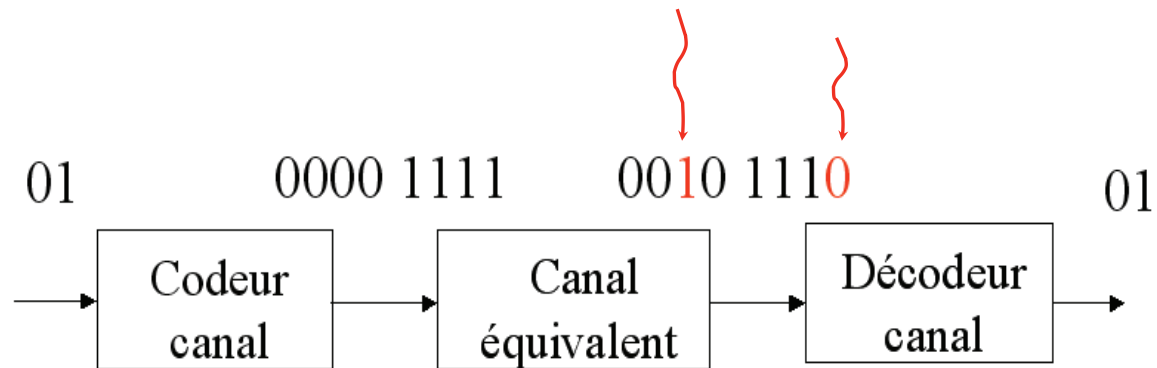
- The binary symmetric channel (BSC): a simple but good model for noise.



# Fighting against noise

---

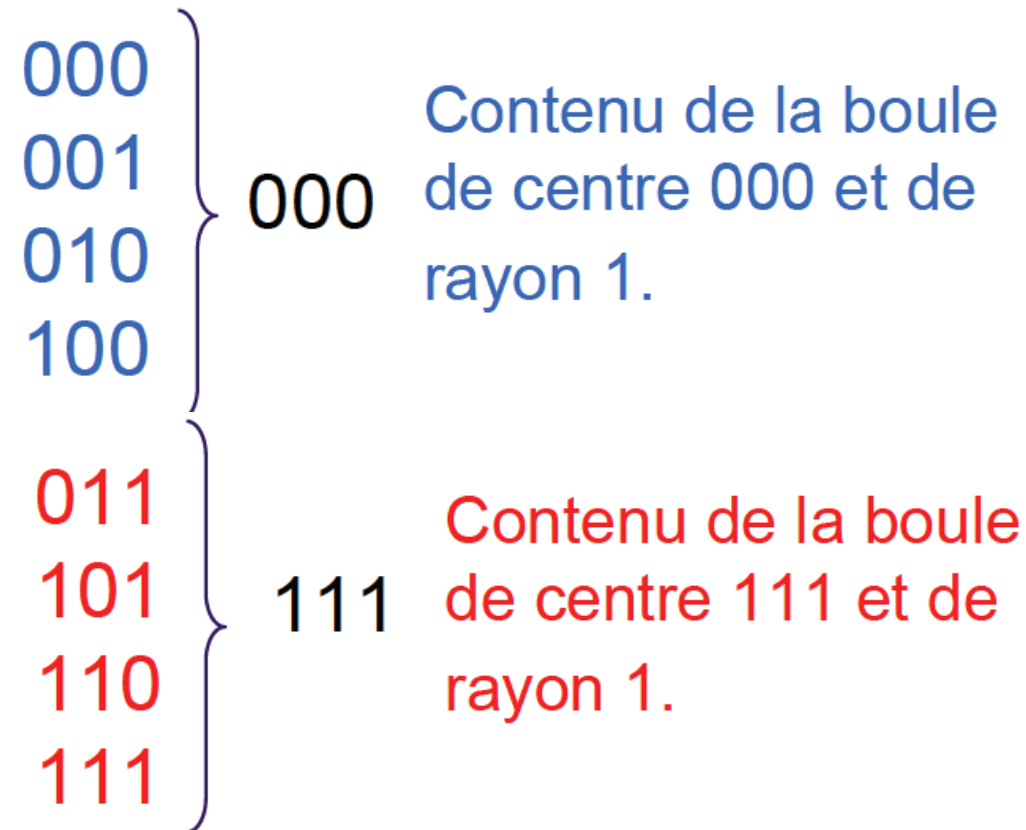
- Example: repetition code. Illustration.



- Vanishing probability of error but also vanishing information rate.

# Illustration

---





# Channel coding: standard definitions [Cover 2006]

---

□ Coding function

$$\begin{aligned} f : \{1, \dots, M\} &\rightarrow \mathcal{U}^\ell \\ m &\mapsto (u_1, \dots, u_\ell) \end{aligned}$$

□ Decoding function

$$\begin{aligned} g : \mathcal{V}^\ell &\rightarrow \{1, \dots, M\} \\ (v_1, \dots, v_\ell) &\mapsto \hat{m} \end{aligned}$$

## Standard performance criteria

---

□ Typical performance criteria: channel coding rate, probability of error.

$$R = \frac{\log_2 M}{\ell}$$

$$P_e = \Pr[\hat{m} \neq m]$$

□ Notion of capacity.

# Capacity formula: binary symmetric channels and Gaussian channels

---

□ Binary symmetric channels

$(V = U \oplus W, (U, V, W) \in \{0, 1\}^3)$

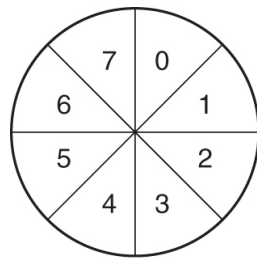
$$C_{\text{BSC}} = 1 - h(p) = 1 - [-p \log_2(p) - (1 - p) \log_2(1 - p)]$$

□ Gaussian channels  $(V = U + W, (U, V, W) \in \mathbb{R}^3)$

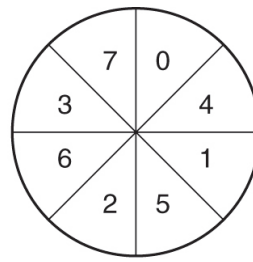
$$C_{\text{AWGN}} = \frac{1}{2} \log_2 (1 + \text{SNR})$$

# Fighting against channel fluctuations

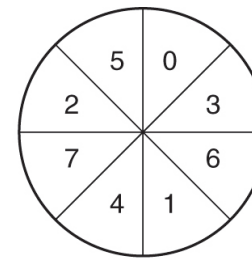
□ Fast fading  $V = GU + W$ . Interleaving. Delay.



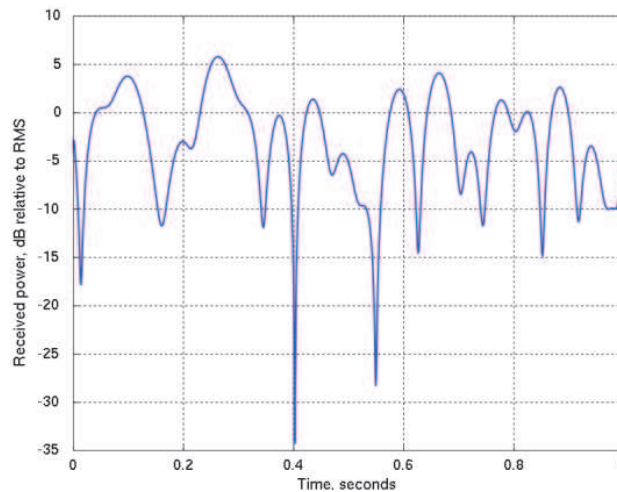
(a)



(b)



(c)



# Communication constraints

---

Technological constraints: non-linearity, randomness, delay, etc.

Inequality constraints.

$$H(X) < C \quad [\text{Cover 2006}]$$

$$R > \sum_{i \in \mathcal{I}_{\text{out}}} \log(\lambda_i(\mathbf{A})) \quad [\text{Tatikonda 2004}]$$

Discussion on performance criteria.

# References

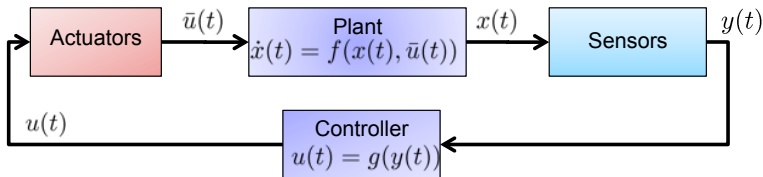
---

[Shannon 1948] C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication", The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379-423, 623-656, July, October, 1948.

[Cover 2006] T. M. Cover and J. A. Thomas, "Elements of Information Theory", 2nd Edition (Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing) Hardcover ? July 18, 2006.

[Tatikonda 2004] S. Tatikonda and S. Mitter, "Control Under Communication Constraints", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, No. 7, July 2004, pp. 1056-1068.

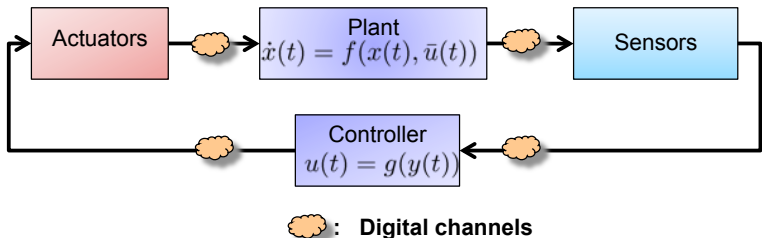
Les problèmes de commande classiques peuvent se décrire comme suit



## Objectif

Synthétiser une loi de commande continue telle que le système bouclé  $\dot{x} = f(x(t), u(t))$  est stabilisé et satisfait un certain niveau de performance.

La présence d'éléments de calcul et/ou de communication dans la boucle de commande ajoute de nouvelles contraintes :



## Nouveaux objectifs

Pour tenir compte *des contraintes induites par ces éléments digitaux ou de communication* dans la boucle de commande

Dans la littérature cette classe de systèmes est souvent appelée *Networked Control Systems* et *Cyber-Physical Systems*.



## Objectifs :

- Modéliser des éléments d'information.
- Analyser les effets des contraintes d'information sur les performances.
- Proposer **des stratégies de commande** et **d'estimation** lorsque les données pour la commande sont transmises via un canal de communication **peu fiable** ou **contraint**.
- Développer conjointement des schémas de commande et de communication.

⇒ *Contrôle avec information limitée.*

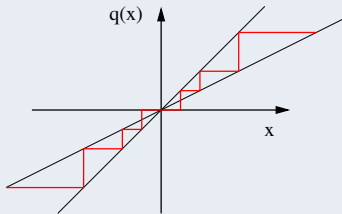




## 1) Non linéarités : Quantification, Codage & Saturation:

Fonction considérée.

$$\hat{x}(t) = q(x(t))$$



L'information réelle est tronquée

*Exemple : approximation numérique*

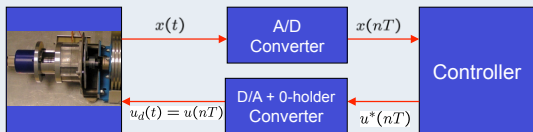
$$x = \pi \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = 3.14$$



## 2) Echantillonnage (sampling) du flux d'information :

$$\hat{x}(t) = x(t_k)$$

$t_k$  : instants  
d'échantillonnage



L'information réelle est gardée en mémoire.

Le problème lié à l'échantillonnage dépasse le cadre des communications.

*Exemple* :  $(t_k = 2\pi k)$

$$x(t) = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(t) = 1$$



### 3) Retard de communication :

L'information n'est pas transmise instantanément.



$$\hat{x}(t) = x(t - \delta)$$

L'information réelle n'est pas disponible avant  $\delta$  secondes.

*Exemple:* ( $\delta = \pi/2$ )

$$x(t) = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(t) (= \cos(t - \pi/2)) = \sin(t).$$

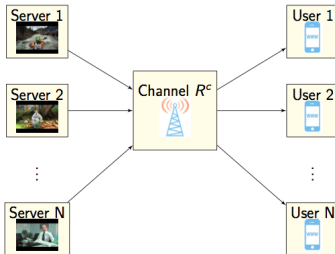


Nous pouvons présenter deux applications traitées dans le contexte prise en compte des contraintes de communication :

- Vidéos à la demande (application directement liée au projet)
- Contrôle de la profondeur d'anesthésie (application non liée directement au projet)

## Vidéos à la demande

Collaboration **LAAS-CNRS-L2S** [Dal Col *et al.*, *CDC'14*].



### Principales caractéristiques

- \* Distribution parallèle de vidéo avec *band-limited channel*
- \* *Systèmes multi-agents*

### Strategie de commande:

- \* *Vitesse d'encodage* de la vidéo.
- \* *Vitesse de transmission*.

### Objectifs de commande :

- \* *Equité* parmi les terminaux quant à la qualité de la vidéo.
- \* *Robustesse* par rapport aux caractéristiques de la vidéo.

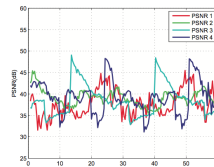


Figure: Simulation 1

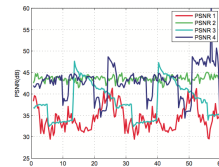
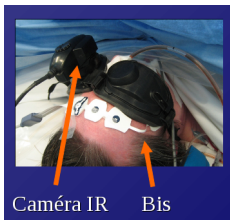


Figure: Simulation 2

## Contrôle de la profondeur d'anesthésie

Collaboration **LAAS-CNRS-CHU** de Toulouse [PhD S. Zabi].

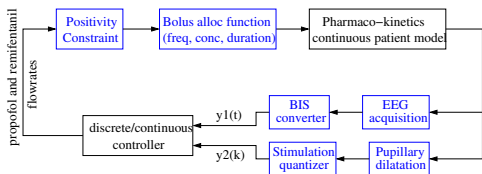


### Objectifs de commande :

- \* *Contrôle de l'administration de la drogue pour à la fois l'inconscience et l'analgésie*
- \* *Combiner BIS avec la dilatation pupillaire*

### Principales caractéristiques

- \* *Variabilité des patients*
- \* *quantification*
- \* *Echantillonnage*
- \* *saturation*
- \* *positivité...*





Nous allons nous focaliser sur un des cas de contraintes de communication :

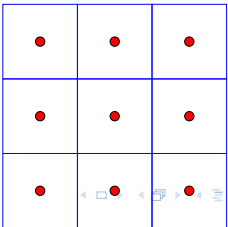
- Système linéaire soumis à un quantificateur en entrée et/ou sur l'état
- Définissons **la notion de quantification**

### Definition

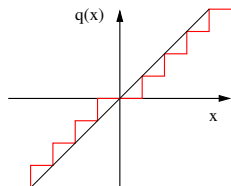
Un quantificateur  $q$  est une fonction qui convertit un signal de  $\mathbb{R}^n$  en un signal qui appartient à un ensemble discret.

$$q : \begin{cases} \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{F} \\ x(t) \rightarrow q(x(t)) \end{cases} \quad \text{avec } \mathbb{F} \text{ un ensemble fini.}$$

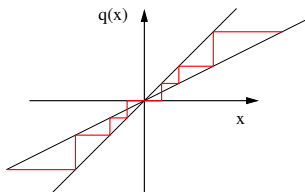
Partition de l'espace d'état en un nombre fini de cellules.



- La répartition peut être **uniforme** (quantifieurs uniformes)



- ou **non uniformes** (quantifieurs logarithmiques ...)



## Rapide historique

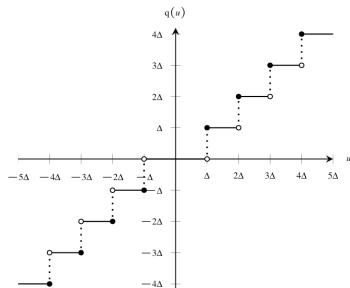
- Quantification : très utilisée en traitement du signal audio, vidéo, (cf algorithmes de compression), étudiée depuis peu par la communauté de la commande.
- Kalman et al, (56), Delchamps (90) étudient l'apparition de cycles limites /trajectoires chaotiques lorsque un quantifieur est ajouté dans la boucle de commande.
- Elia-Mitter (01), Brockett-Liberzon (00-03) étudient la stabilisation des systèmes linéaires puis non linéaires soumis à des entrées/sorties quantifiées.
- Mitter,Tatikonda (01-04) étudient le lien entre la théorie de l'information et théorie de la commande. **Quelle est la quantité d'information minimale à transmettre pour stabiliser un système dynamique?**
- Liberzon (07-09), commande hybride des systèmes quantifiés, Fridman et al (09) quantification et retards, Astolfi (09), Tarbouriech (12), Ferrante (14,15) quantification et saturation ...

## Description du système (1)

- On considère un système à temps continu avec entrée quantifiée décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= q(u_c) \end{cases} \quad (1)$$

- $q$  est une fonction qui transforme l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^n$  dans un ensemble fini (dénombrable)  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^m$ . Plus précisément on considère un quantificateur uniforme :



## Description du système (2)

- Pas d'hypothèse de stabilité pour la matrice  $A$ .
- La paire  $(A, B)$  est supposée contrôlable.
- On suppose que le système est contrôlé via un retour d'état :  
 $u_c = Kx$ .
- Le système bouclé étudié est donc :

$$\dot{x} = Ax + Bq(Kx) \quad (2)$$

## Description du système (3)

- **Existence de solutions.** La présence du quantificateur (et sa définition) implique la présence d'une discontinuité.
  - ▷ l'existence de solutions pour le système (2) n'est pas garantie (Filippov, 1988).
  - ▷ Notion de solutions plus générales à considérer.
  - ▷ Solutions du type Carathéodory (Ceragioli et al., 2011, Cortés, 2008) et Krasovskii (Krasovskii, 1963, Cortés, 2008).
- **Exemple :**  $\dot{x} = q(-x) = -\text{sign}(x)$ .  $q$  transforme  $\mathbb{R}$  en  $\{-1, 1\}$ .  
Pas de solutions de Carathéodory mais existence de solution de Krasovskii

## Description du système (4)

- Etude de la stabilité - Problème 1.
  - ▷ Analyse de la stabilité du système (2).
  - ▷ On se basant sur les solutions de Krasovskii
  - ▷ Cela implique d'utiliser une description du système bouclé via les inclusions différentielles :

$$\dot{x} \in \mathcal{K}(x)$$

## Propriétés préliminaires

- Le quantificateur  $q(Kx)$  est défini comme :

$$q(Kx) = \Delta \operatorname{sign}(Kx) \left\lfloor \frac{|Kx|}{\Delta} \right\rfloor$$

où  $\Delta$  est la borne sur l'erreur de quantification.

- On a les propriétés suivantes :

- ▶ On peut vérifier que chaque composante de  $Kx$  :

$$|q(K_i x) - K_i x| \leq \Delta, i = 1, \dots, m$$

- ▶  $q(0) = 0$

- Le système sans quantificateur est linéaire :  $\dot{x} = (A + BK)x$

- ▶ Si  $A + BK$  est Hurwitz alors  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour ce système



## Question préliminaire

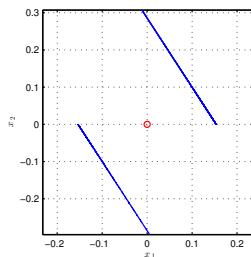
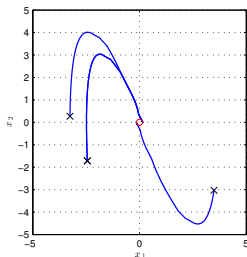
- $x = 0$  est-il un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé (2) ?
  - ▷ Si tel est le cas alors notre problème d'analyse est résolu.
  - ▷ Nous allons voir que cette propriété est perdue en présence de l'élément  $q(x)$ .
- Nous verrons alors comment ceci nous amène à reposer plus précisément le problème à traiter.

## Exemple 1

- Considérons le système du "balancing pointer" décrit par les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}; K = [13 \quad 7] \Delta = 2$$

- ▷  $A + BK$  est Hurwitz avec les valeurs propres  $-3, -4$
- ▷ Présence de points d'équilibre parasites



## Remarques (1)

- La propriété de stabilité du système sans quantification est donc perdue lorsque l'on rajoute le quantificateur
  - ▷ Ce phénomène est bien établi dans la littérature (voir par exemple Ceragioli et al., 2011, D. Liberzon, 2003, S. Tarbouriech & F. Gouaisbaut, 2012).
  - ▷ La raison de ce phénomène découle directement de la définition du quantificateur uniforme
  - ▷ La présence de la deadzone

$$q(Kx) = 0 \text{ pour } |K_i x| \leq \Delta, i = 1, \dots, m$$

implique qu'il existe une région de l'espace d'état  $|K_i x| \leq \Delta, i = 1, \dots, m$  où le système bouclé évolue avec la dynamique du système en boucle ouverte

- Le système bouclé peut donc présenter des comportements complexes autour de l'origine (point d'équilibre, cycle limite, ...) qui s'avèrent non triviaux à étudier

## Remarques (2)

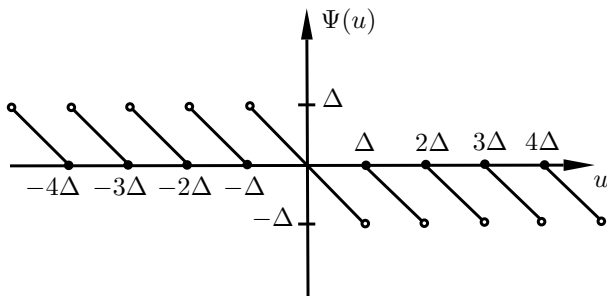
- On peut cependant, sous réserve que certaines conditions soient satisfaites (D. Liberzon, 2003, S. Tarbouriech & F. Gouaisbaut, 2012), montrer que les trajectoires du système bouclé sont bornées et convergent vers un ensemble compact et invariant  $\mathcal{A}$  qui contient l'origine.
  - ▷ Un tel ensemble contiendra les points d'équilibre parasites, les cycles limites, ...
  - ▷ Cet ensemble représente une approximation par l'extérieure du comportement du système autour de l'origine.
- L'ensemble  $\mathcal{A}$  possède 2 propriétés importantes :
  - ▷ Les trajectoires initialisées dans cet ensemble restent définitivement confinées dedans (**invariance**) ;
  - ▷ Les trajectoires initialisées en dehors de cet ensemble convergent vers lui (**attractivité**).

## Problème d'analyse

- **Problème 2.** Supposons les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $K$  données, telles que  $A + BK$  est Hurwitz, déterminer un ensemble compact  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  contenant l'origine et UGAS pour le système (2).
- **Uniformité :** convergence indépendante de la condition initiale.

## Résultats d'analyse (1)

- On définit la non linéarité  $\psi(Kx) = q(Kx) - Kx$



- Ce qui nous donne le système bouclé

$$\dot{x} = (A + BK)x + B\psi(Kx) \quad (3)$$

## Résultats d'analyse (2)

- **Théorème 1.** Supposons les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $K$  données, telles que  $A + BK$  est Hurwitz, alors il existe un ensemble compact  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  contenant l'origine et UGAS pour le système (3).
- C'est un résultat général dont la preuve est très technique (Thèse de F. Ferrante) qui ne nous aide pas pour caractériser l'ensemble  $\mathcal{A}$ .
- Utilisation des propriétés de  $\psi$  :
  - ▷ **Lemme 1.** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux matrices diagonales définies positives de  $\mathbb{R}^{m \times m}$ . Pour  $u_c \in \mathbb{R}^m$ , les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \psi(u_c)' S_1 \psi(u_c) - \text{trace}(S_1) \Delta^2 &\leq 0 \\ \psi(u_c)' S_2 (\psi(u_c) + u_c) &\leq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

- ▷ Lemme 1 est associé aux solutions de Carathéodory et peut être généralisé au cas des solutions de Krasovskii

### Résultats d'analyse (3)

- **Proposition 1.** S'il existe  $P = P' > 0$ ,  $S_1$  et  $S_2$  deux matrices diagonales définies positives et un scalaire positif  $\tau$  tels que

$$\begin{bmatrix} (A + BK)'P + P(A + BK) + \tau P & PB - K'S_2 \\ B'P - S_2K & -S_1 - 2S_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

$$\text{trace}(S_1)\Delta^2 - \tau \leq 0 \quad (6)$$

alors  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px \leq 1\}$  est solution du Problème 2.

- **Preuve.** Montrer que  $\dot{V}(x) \leq -\beta x'x$ ,  $\beta > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathcal{A})$ , en utilisant les condition du Lemme 1.



## Résultats d'analyse (4)

- On peut montrer qu'il existe toujours une solution  $(P, S_1, S_2, \tau)$  aux conditions (5)-(6).
- La seule non linéarité est le produit  $\tau P$ . On peut faire une grille sur  $\tau$ .
- **Objectif implicite.** Il s'agit de minimiser l'ensemble  $\mathcal{A}$ .
  - ▷ Différent critères peuvent être choisis comme par exemple

$$\text{minimise } \text{trace}(P^{-1})$$

- ▷ Puisque  $P$  est une variable de décision on peut ajouter la contrainte

$$\begin{bmatrix} N & I \\ I & P \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

et minimiser  $\text{trace}(N)$ .

## Simulation.

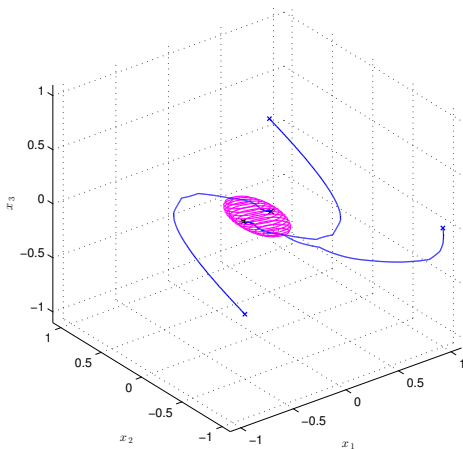
- Une fois que l'on a des conditions pour vérifier la stabilité du système, une question naturelle peut-être posée : comment simule-ton le système (3) en tenant compte du type de solution retenu ?
- On utilise la notion de solutions d'Euler qui sont des solutions de Krasovskii (Bressan, 1998) et la notion d'approximation polygonale

## Exemple 2 (1).

- Le système considéré est décrit par

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 & 4 \\ 4.3 & 6 & 5 \\ 3.2 & 6.8 & 7.2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -0.7 & -1.3 \\ 0 & -4.3 \\ 0.8 & -1.5 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} -0.7 & 1.9 & -27 \\ 4.3 & 4.1 & 4.3 \end{bmatrix}$$

$\Delta = 0.5$



## Exemple 2 (2).

- L'origine est un point instable
- Les trajectoires convergent vers 2 points d'équilibre qui appartiennent aux surfaces

$$Kx = \begin{bmatrix} \Delta \\ -\Delta \end{bmatrix} \text{ et } Kx = \begin{bmatrix} -\Delta \\ \Delta \end{bmatrix}$$

- Ces points d'équilibre sont des équilibre de Krasovskii. Le calcul de ce type de points peut s'avérer très complexe :

$$Ax + B \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \Delta = 0 \text{ et } Kx = \begin{bmatrix} \Delta \\ -\Delta \end{bmatrix}$$

pour  $(\delta_1, \delta_2) \in [0, 1] \times [-1, 0]$

## Conclusion.

- Les conditions LMIs obtenues sont les mêmes que l'on considère des solutions de type Carathéodory ou de Krasovskii.
- Considérer les solutions de Krasovskii et le cadre mathématique associé permet de calculer les points d'équilibre
- Un autre point clef dans l'utilisation de solutions de Krasovskii réside dans la simulation.
  - ▷ Discrétisation via Euler  $((x_{k+1} - x_k)/\tau$
  - ▷ Euler correspond à Krasovskii pour  $\tau \rightarrow 0$