Variétés centrées et modes glissants pour la synthèse de commandes non-linéaires, robustes et d'ordres réduits

Lyes NECHAK

Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS)

Plan

- ✓ **Introduction**
  - Contexte, problème et objectifs
- ✓ **Réduction de modèles non-linéaires**
  - Variété centrée
  - Application et résultats
- ✓ **Commande d'ordre réduit par modes glissants**
  - Idée principale
  - Stabilité du système original en boucle fermée
  - Application et résultats
- ✓ **Conclusion**

- SISO-Systèmes dynamiques décrits dans l'espace d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\mu)x(t) + f_{nl}\left(x(t),\mu\right) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad x = \in \mathbb{R}^n \text{ , } \mu \in \mathbb{R}$$

Transformation non-linéaire de coordonnées

$$\Downarrow \quad z_r = \phi(x) \text{ , } \quad z_r \in \mathbb{R}^r \text{ , } r \ll n$$

$$\begin{cases} \dot{z}_r(t) = A_r(\mu)z_r(t) + f_{nl}\left(z_r(t),\mu\right) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r z_r(t) \end{cases}$$

Modèle d'ordre réduit

Avec comme condition $y_r(t) \approx y(t)$

- Méthodes de réduction → comment déterminer la transformation $z_r = \phi(x)$?
  - Objectif de la réduction (analyse, prédiction, commande)
  - Propriétés du système à réduire (non-linéarité, dépendance du temps, incertitudes, stabilité,…)

✓ **Systèmes à interfaces frottantes**

- Non-linéaires (contacts frottants)
- Instables: vibrations induites par le frottement (VIF)

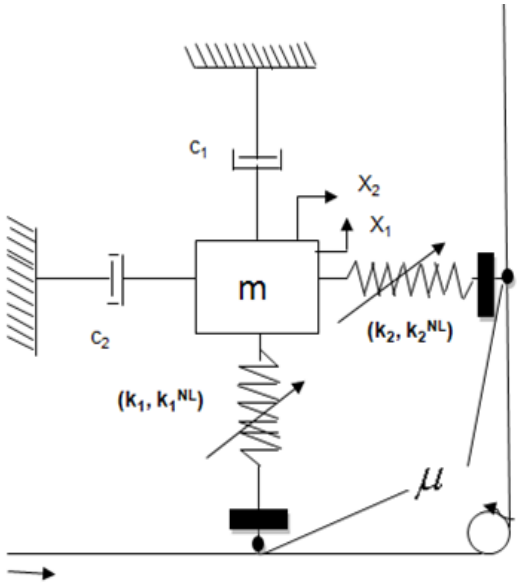
  – Bruit
  – Dégradation de performances (erreurs statiques et temps de réponses trop importants
  – Fatigue, usure → rupture

✓ **Origine des VIF**

- Mécanismes tribologiques → Stick-Slip
- Mécanismes structurels → Couplage de modes

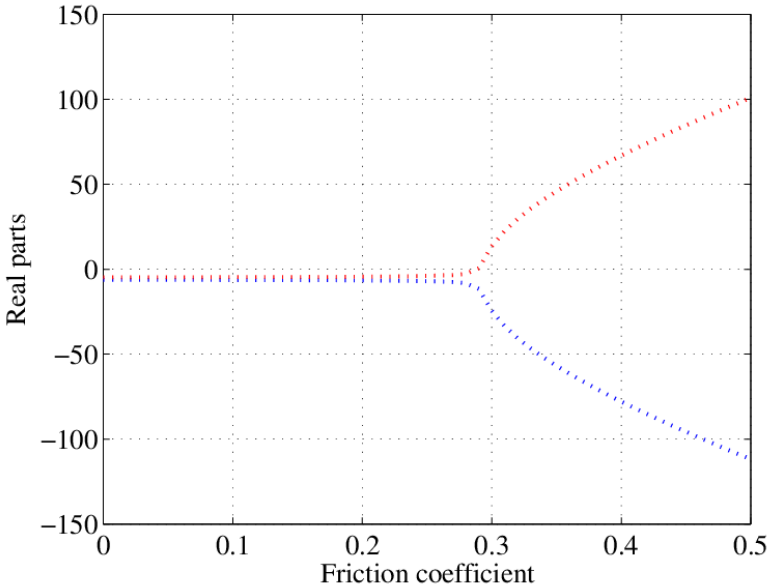
$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) + F_{NL}\left(X(t), \mu\right) = 0$$

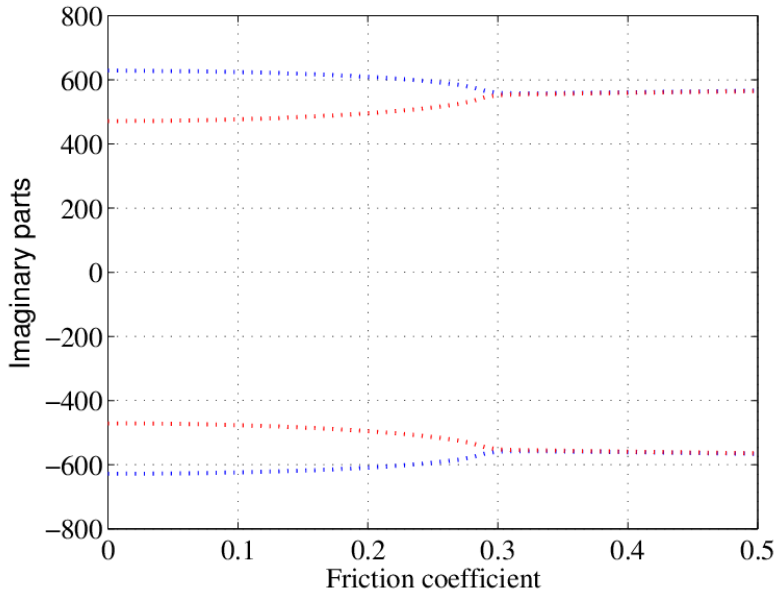
$$F_{NL}\left(X(t), \mu\right) = \begin{bmatrix} k_1^{NL} X_1^3(t) - \mu k_2^{NL} X_2^3(t) \\ \mu k_1^{NL} X_1^3(t) + k_2^{NL} X_2^3(t) \end{bmatrix}$$

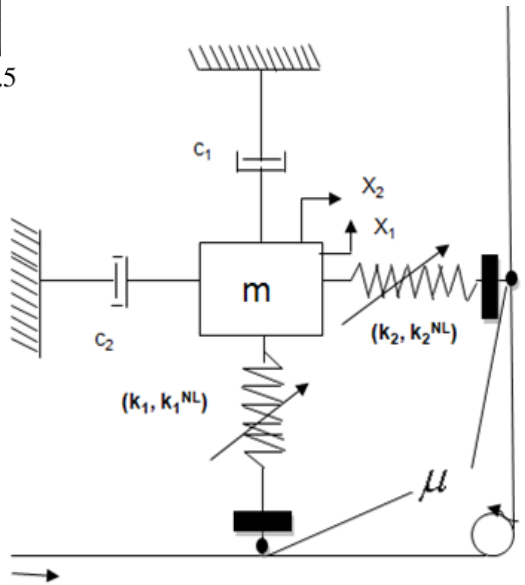


Système de Hultèn

- ✓ Vibrations induites par le frottement
  - Couplage de modes → coalescence de modes au point de bifurcation de Hopf

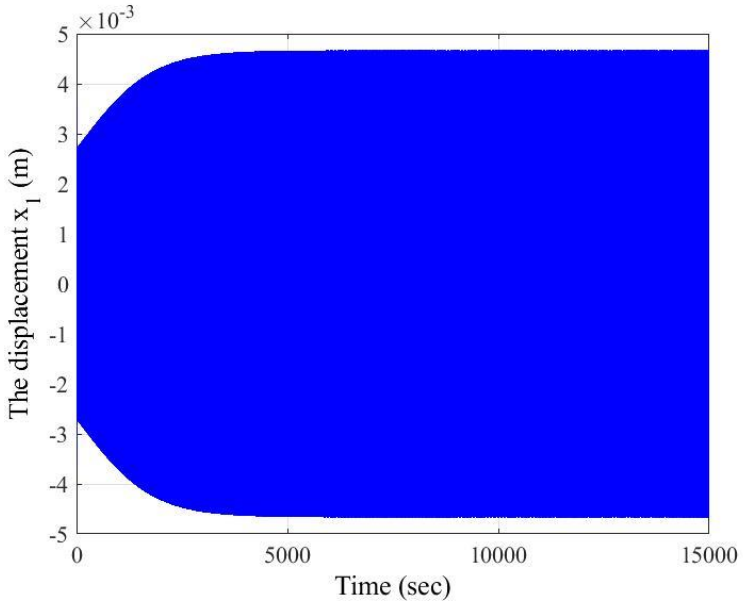


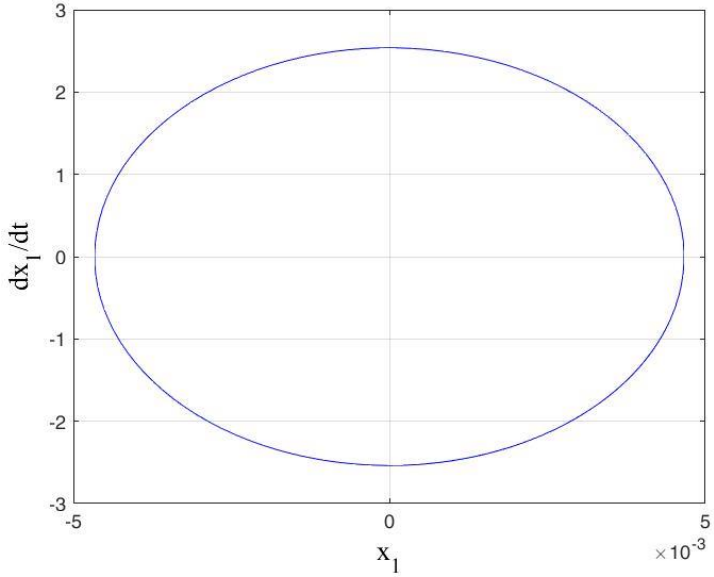


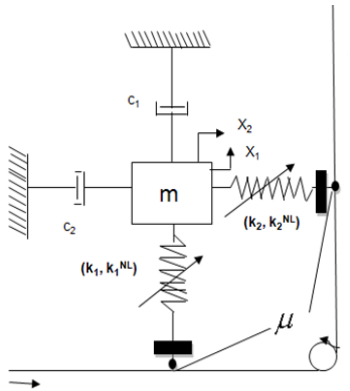


✓ Vibrations induites par le frottement

- Couplage de modes
  - Oscillations de type cycle limite au voisinage du point de bifurcation de Hopf







  - On cherche à atténuer, voire, à supprimer ces vibrations → Contrôle de vibrations

✓ Difficultés

- Complexité des systèmes (nombre de degrés de liberté)
  - Contrôleurs complexes → inefficacité
    - Synthèse de contrôleur d'ordre réduit à partir d'un modèle d'ordre réduit
- Robustesse du contrôleur vis-à-vis de :
  - L'erreur de réduction (écart entre le modèle d'ordre réduit et le modèle original)
  - Incertitudes paramétriques

→ Synthèse de contrôleurs d'ordres réduits robustes pour des systèmes non-linéaires instables

1. Variété centrée pour la réduction de modèles non-linéaires instables
2. Modes glissants pour la synthèse de commandes non-linéaires robustes

✓ Variété centrée

- Mettre le système sous forme canonique augmentée

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\tilde{\mu})x(t) + f_{nl}\left(x(t), \tilde{\mu}\right) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \xrightarrow{z = Tx}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_c(t) = A_c(\tilde{\mu})z_c(t) + f_c\left(z_c(t), z_s(t), \tilde{\mu}\right) + B_c u(t) \\ \dot{z}_s(t) = A_s(\tilde{\mu})z_s(t) + f_s\left(z_c(t), z_s(t), \tilde{\mu}\right) + B_s u(t) \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \ , \ \tilde{\mu} = (1+\varepsilon)\mu_c \ , \ \varepsilon << 1 \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_c & C_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c(t) \\ z_s(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

T : matrice des vecteurs propres généralisés

$$A_c = diag\left(\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{n_c}\right), A_s = diag\left(\lambda_{n_c+1} \quad \dots \quad \lambda_n\right)$$

$\left(\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{n_c}\right)$ → *Valeurs propres imaginaires pures*

$\left(\lambda_{n_c+1} \quad \dots \quad \lambda_n\right)$ → *Valeurs propres à parties réelles négatives*

✓ Variété centrée

- Réduction à partir de la forme canonique

$$\begin{cases} \dot{z}_c(t) = A_c(\tilde{\mu})\, z_c(t) + f_c\left(z_c(t), z_s(t), \tilde{\mu}\right) + B_c u(t) \\ \dot{z}_s(t) = A_s(\tilde{\mu})\, z_s(t) + f_c\left(z_c(t), z_s(t), \tilde{\mu}\right) + B_s u(t) \quad , u(t) = 0 \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \ , \ \tilde{\mu} = (1+\varepsilon)\mu_c \ , \ y(t) = \begin{bmatrix} C_c & C_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c(t) \\ z_s(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Théorème de la variété centrée

$$\exists\, \phi \ / \begin{cases} z_s(t) = \phi\left(z_c(t), \tilde{\mu}\right) \\ \phi(0,0) = 0 \ , \ J_\phi(0,0) = 0 \end{cases}$$

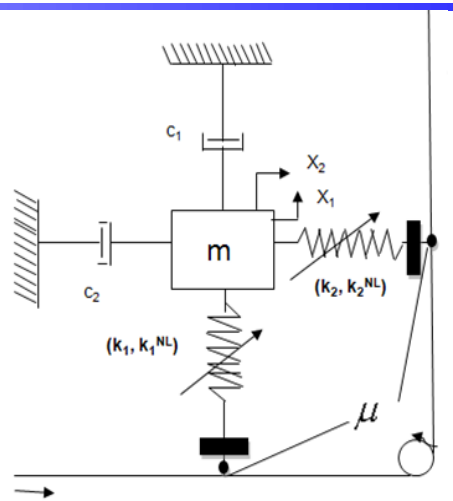
$$\Downarrow$$

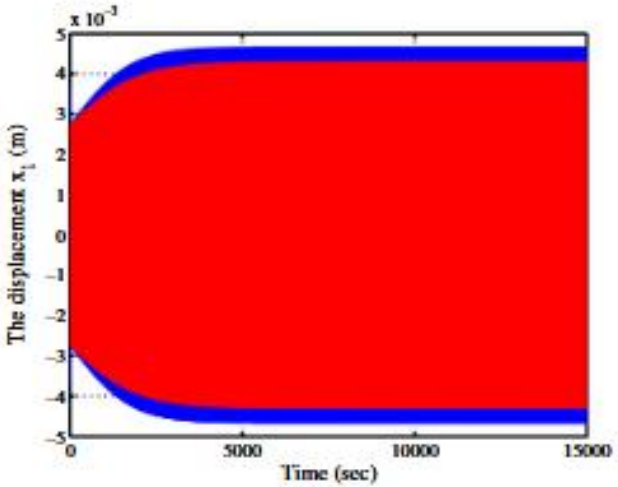
$$\left(J_\phi\left(z_c(t), \tilde{\mu}\right)\right)\left\{A_c(\tilde{\mu})\, z_c(t) + f_c\left(z_c(t), \phi\left(z_c(t), \tilde{\mu}\right), \tilde{\mu}\right)\right\} = \left\{A_s(\tilde{\mu})\, \phi\left(z_c(t), \tilde{\mu}\right) + f_s\left(z_c(t), \phi\left(z_c(t), \tilde{\mu}\right), \tilde{\mu}\right)\right\}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_c(t) = A_c(\tilde{\mu})\, z_c(t) + f_c\left(z_c(t), \phi\left(z_c(t), \tilde{\mu}\right), \tilde{\mu}\right) + B_c u(t) \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \ , \ \tilde{\mu} = (1+\varepsilon)\mu_c \quad , u(t) = 0 \\ y_r(t) = C_c z_c(t) \end{cases}$$

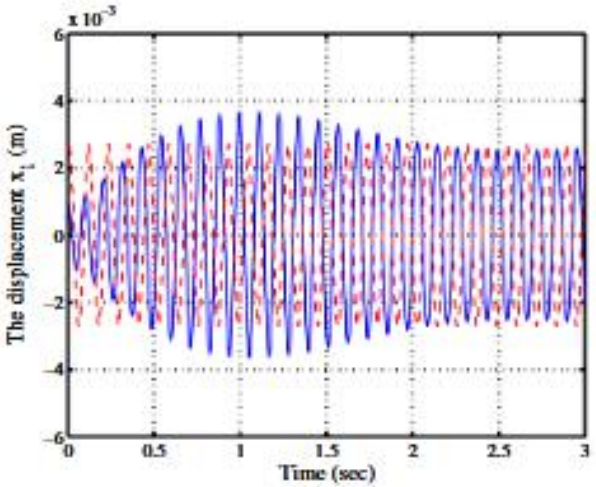
✓ Application au système de Hultèn

- Réduction à l'ordre deux via une variété centrée d'ordre 3

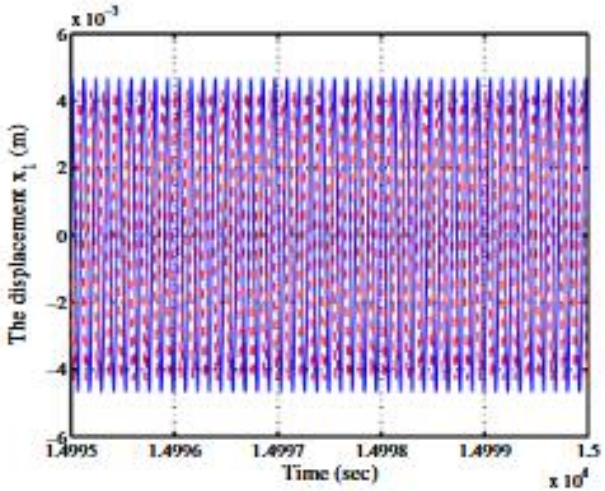




(a)



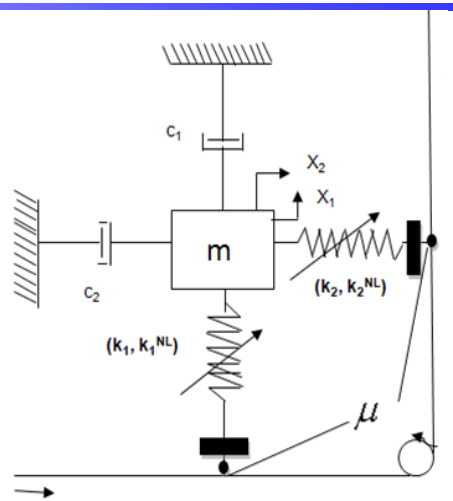
(b)

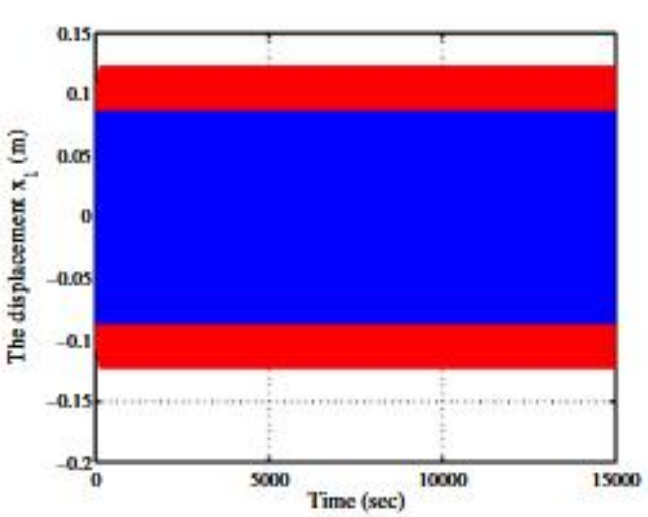


(c)

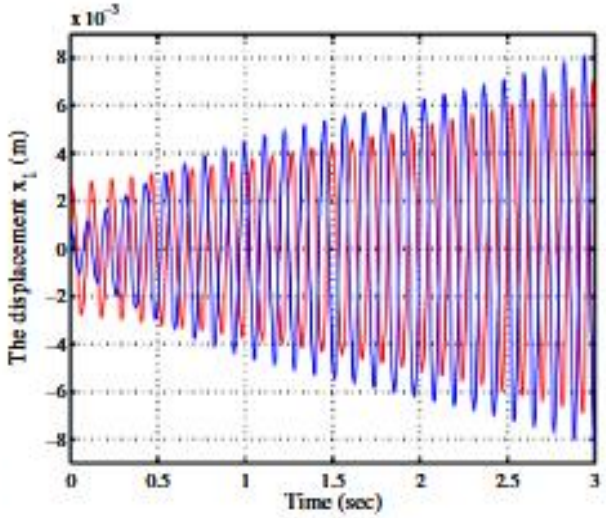
Le déplacement vertical de la masse $\mu = \mu_c\left(1+\varepsilon\right), \varepsilon = 10^{-4}$

✓ Application au système de Hultèn

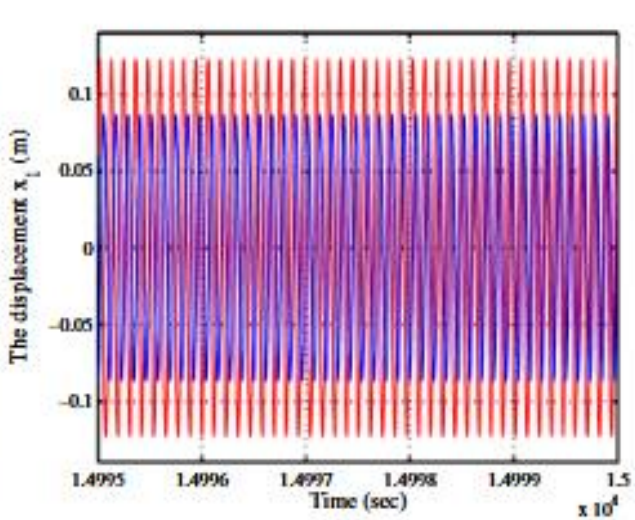




(d)



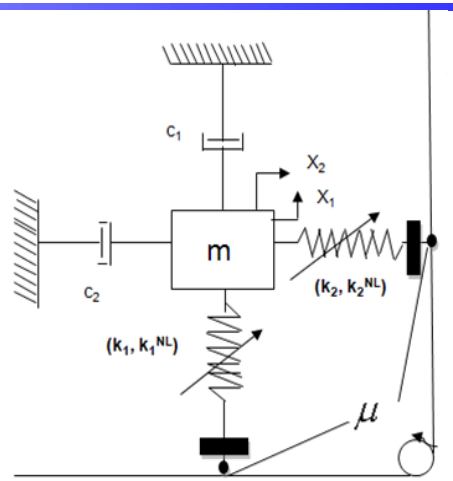
(e)



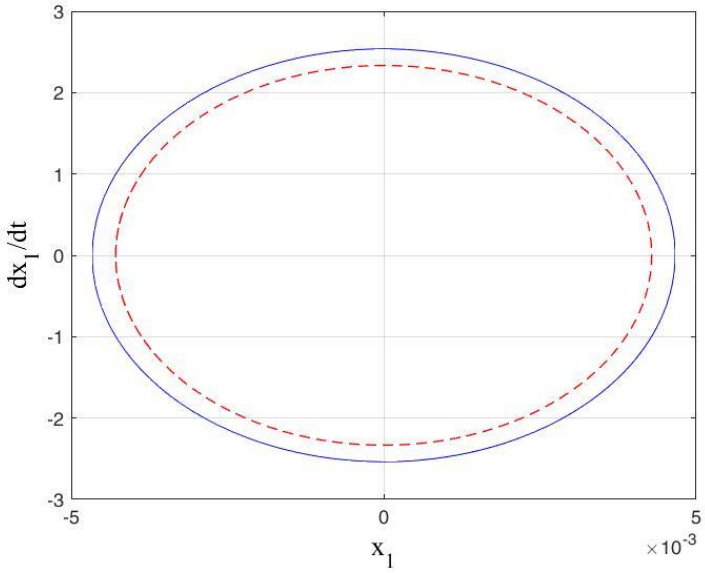
(f)

Le déplacement vertical de la masse $\mu = \mu_c \left(1+\varepsilon\right), \varepsilon = 10^{-2}$

✓ Application au système de Hultèn

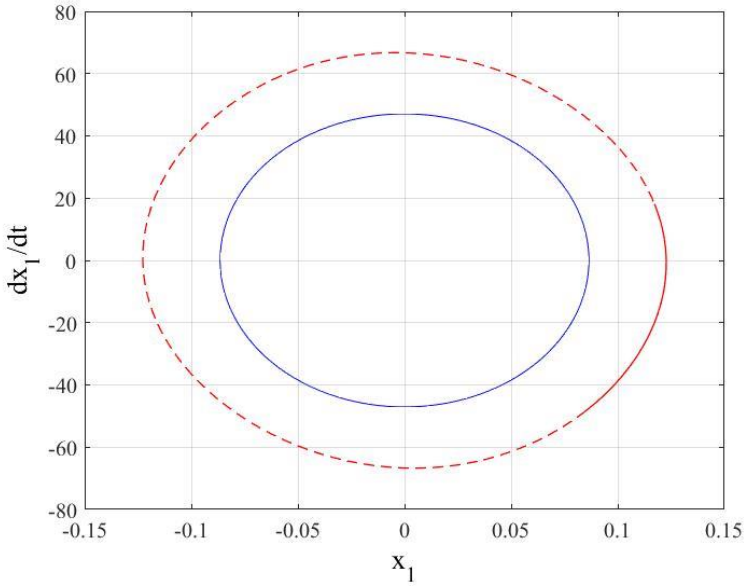


Er = 8%



Cycle limite correspondant à $\mu = \mu_c\left(1+\varepsilon\right), \varepsilon = 10^{-4}$

Er = 30 %



Cycle limite correspondant à $\mu = \mu_c\left(1+\varepsilon\right), \varepsilon = 10^{-2}$

✓ Contrôleur par modes glissants

- En utilisant le modèle d'ordre réduit

  – Robustesse par rapport à l'erreur à de réduction (troncature, ordre de la variété centrée)

  – Robustesse par rapport au incertitudes paramétriques (dispersion du coefficient de frottement au voisinage du point de bifurcation de Hopf)

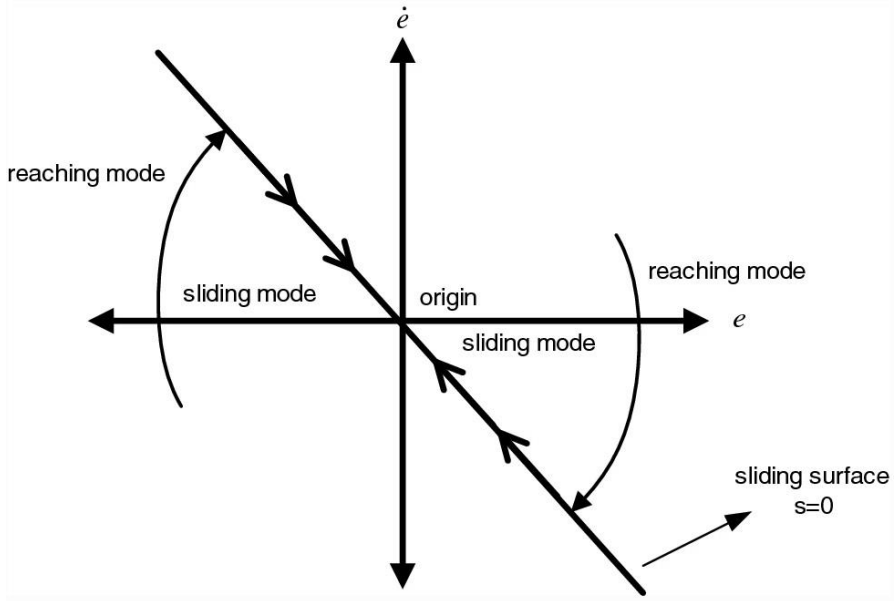
    – Méthode candidate → modes glissants

✓ Modes glissants/ idée de base

- Forcer le système à suivre une trajectoire désirée / $e(t) = Cz(t) - y_d(t)$, $z = Tx$

  – Définir une surface de glissement S

$$\begin{cases} \dot{S} = h(u(t)) \\ y(t) \xrightarrow[S \to 0]{} y_d(t) \end{cases}$$



  – La surface de glissement

$$S = e(t) = Cz(t) - y_d(t) \ , \ y_d(t) = 0$$

  – La forme générale du la commande $u(t) = u_{equ}(t) + u_s(t)$

    » Commande équivalente $u_{equ}(t) \ / \ \dot{S} = 0$

    » Commande discontinue $u_s(t) \ / \ S = 0$

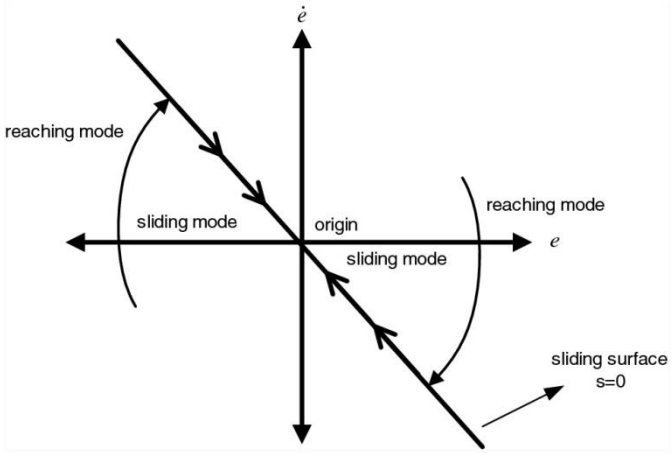
✓ Modes glissants/ idée de base

- Forcer le système à atteindre $u_{equ}(t) \;/\; \dot{S} = 0$

$$u_{equ}(t) = -[CB]^{-1} C\left(A(\tilde{\mu}) z(t) + f_z\left(z(t), \tilde{\mu}\right)\right),\; f_z = [f_c, f_s]^T$$

- Forcer la trajectoire à rester sur la surface de glissement

$$u_s(t) \;/\; S = 0$$



  - Condition d'attractivité (stabilité au sens de Lyapunov)

$$V = \frac{1}{2} S^2 \;\wedge\; \dot{V} = S^T \dot{S} < 0$$

$$u_s(t) = -K_g \,\mathrm{sign}(S)$$

- Synthèse du contrôleur à partir du modèle d'ordre réduit ??

✓ **Synthèse en utilisant le modèle d'ordre réduit via la variété centrée**

$$\begin{cases} \dot{z}_c(t) = A_c(\tilde{\mu}) z_c(t) + f_c\left(z_c(t), \phi\left(z_c(t), \tilde{\mu}\right), \tilde{\mu}\right) + B_c u(t) \\ y_r(t) = C_c z_c(t) \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \ , \ \ \tilde{\mu} = (1+\varepsilon)\mu_c \end{cases}$$

- Si le modèle réduit est stabilisé par la commande par modes glissant, d'ordre réduit telle que:

$$u_r(t) = u_{equ}^r(t) + u_s^r(t)$$

$$\begin{cases} u_{equ}^r(t) = -\left[C_c B_c\right]^{-1} C_c \left\{ A_c(\tilde{\mu}) z_c(t) + f_c\left(z_c(t), \phi\left(z_c(t), \tilde{\mu}\right), \tilde{\mu}\right) \right\} \\ u_s^r(t) = -K_r Sign\left(S_r\left(z_c(t)\right)\right), \ K_r > 0 \ , S_r = C_r z_c(t) - y_d \end{cases}$$

stabiliserait-il le modèle original (d'ordre complet) ?

✓ **Quelques éléments de démonstration**

- La question → est ce que $V = \frac{1}{2} S^T S \wedge \dot{V} = S^T \dot{S} < 0$ demeure vérifié en considérant

$$u_r(t) = u_{equ}^r(t) + u_s^r(t)$$

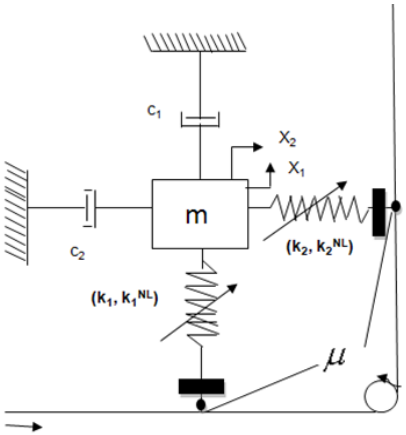
$$\begin{cases} u_{equ}^r(t) = -\left[C_c B_c\right]^{-1} C_c \left\{ A_c(\tilde{\mu}) z_c(t) + f_c\left(z_c(t), \phi\left(z_c(t), \tilde{\mu}\right), \tilde{\mu}\right) \right\} \\ u_s^r(t) = -K_r Sign\left(S_r\left(z_c(t)\right)\right),\ K_r > 0\ ,\ S_r = C_r z_c(t) - y_d \end{cases}$$

$$S^T \dot{S} = z^T C^T C\left(A(\tilde{\mu}) z + f_z(z, \tilde{\mu}) + B\left(u_r^{equ} + u_r^s\right)\right) < 0$$

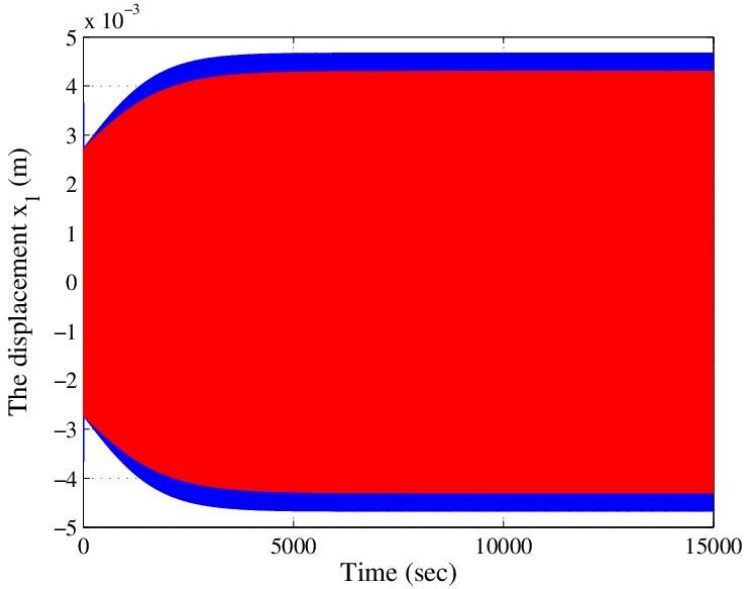
$$S^T \dot{S} = z^T C^T C\left(\bar{A}(\tilde{\mu}) z + \begin{bmatrix} 0 \\ f_s(z_c, z_s, \tilde{\mu}) \end{bmatrix}\right) - K_r S^T sign(S_r),\ \bar{A} = \begin{bmatrix} 0_{n_c} & 0_{n_c \times n_s} \\ 0_{n_s \times n_c} & A_s \end{bmatrix},\ S = Cz,\ K_r > 0$$

$$S^T \dot{S} = -K_r S^T \text{sign}\left(S_r\right) < 0$$

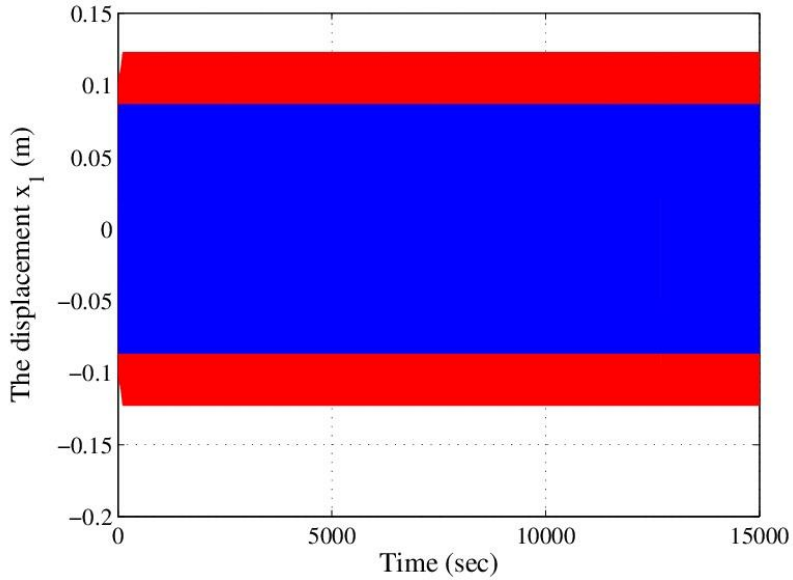
✓ Application au système de Hultèn



Déplacement vertical de la masse

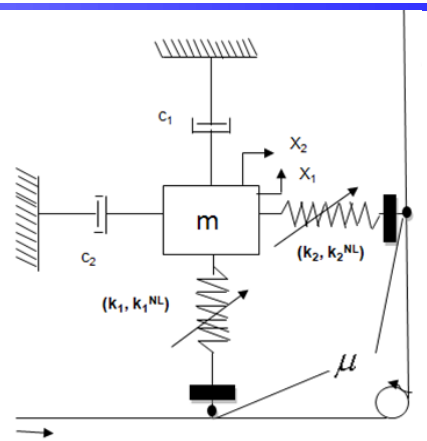


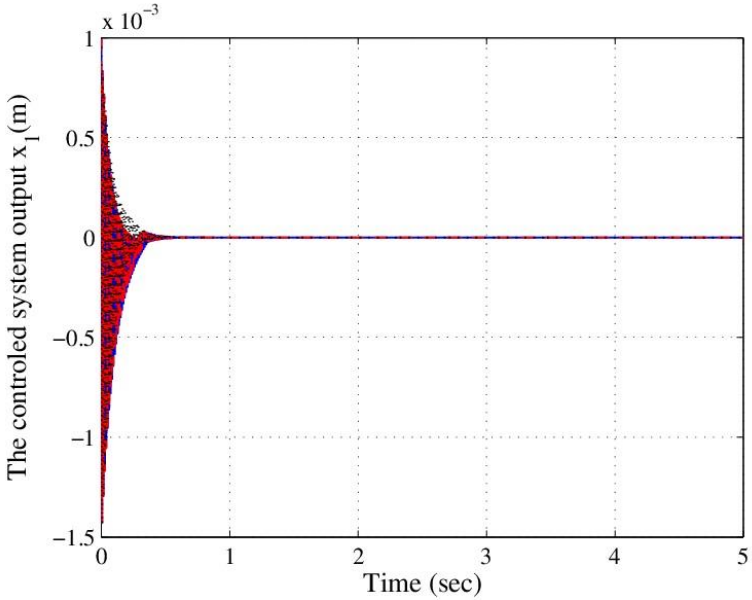
$$\mu = \mu_c\left(1+\varepsilon\right), \varepsilon = 10^{-4}$$

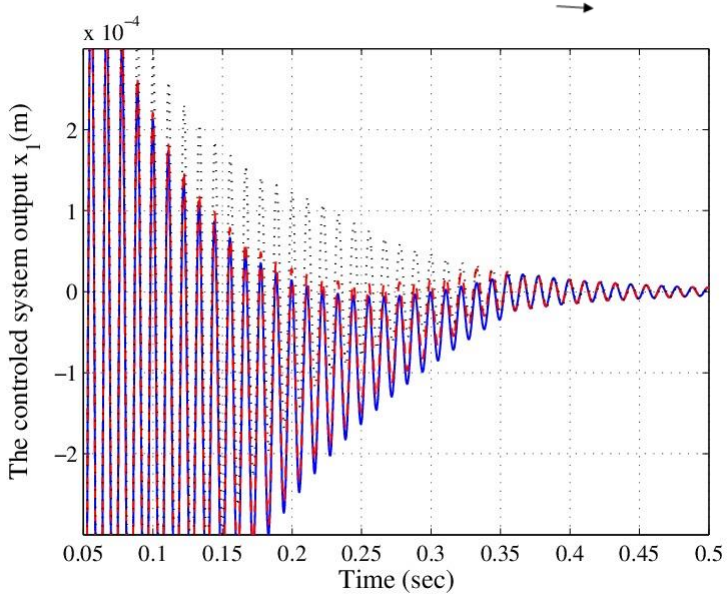


$$\mu = \mu_c\left(1+\varepsilon\right), \varepsilon = 10^{-2}$$

✓ Application au système de Hultèn

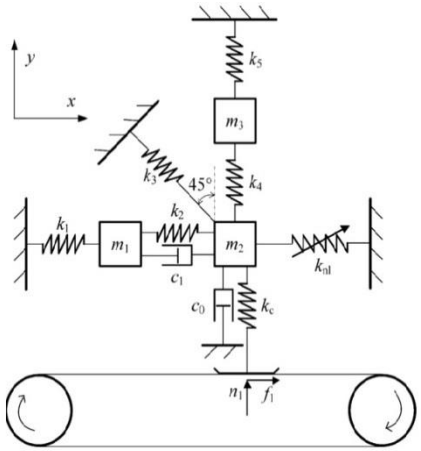






Le déplacement vertical contrôlé avec $\mu = \mu_c\left(1+\varepsilon\right), \varepsilon = \left\{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}\right\}$

✓ Application au système de Hoffman



$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) + F_{NL}\left(X(t)\right) = Lu(t)$$

$$F_{NL}(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{nl}x_2^3 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad L = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix}^T$$

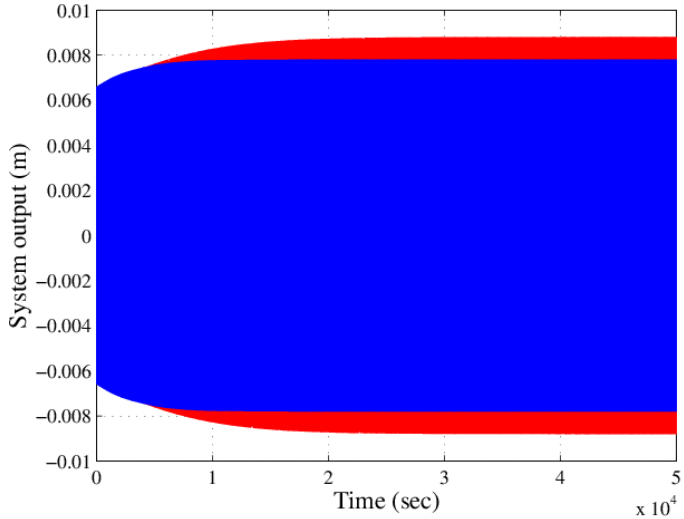
$$X = \begin{bmatrix} x_1 & y_3 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T$$

$$C_x = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

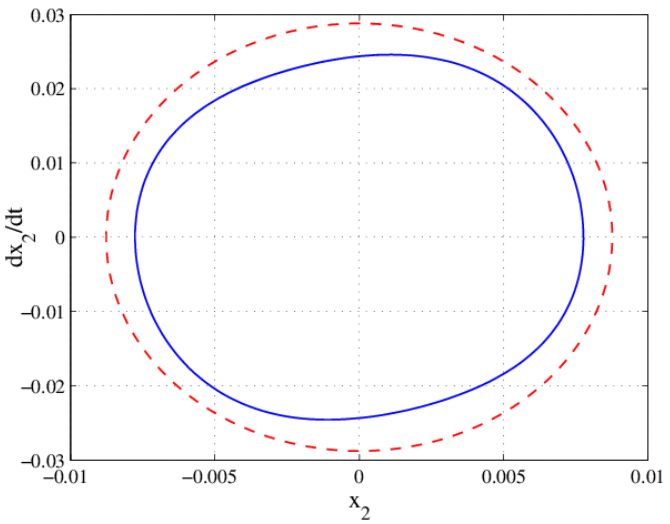
$$B_x = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix}^T$$

» Réduction à l'ordre 2 (variété centrée de degré 3)

$$\tilde{\mu} = \mu_c(1+\varepsilon),\ \mu_c = 0.2538\ ,\ \varepsilon = 10^{-3}$$



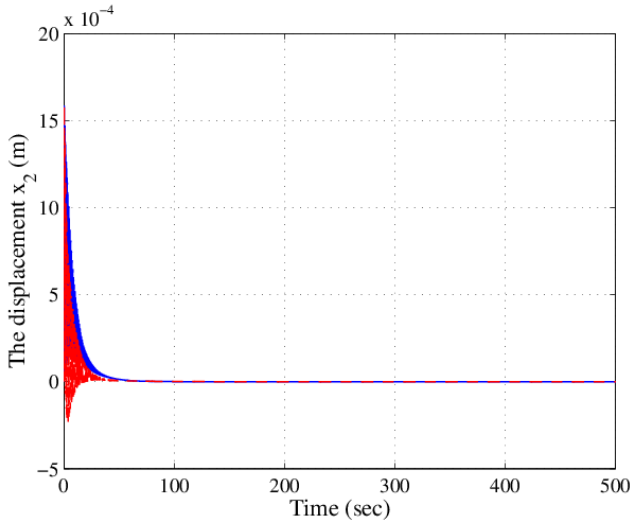
Déplacement x2 , (bleu, rouge) → (original, réduit)

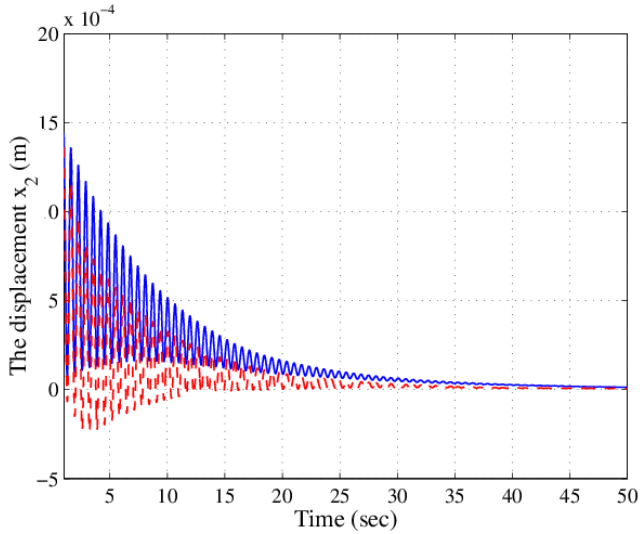


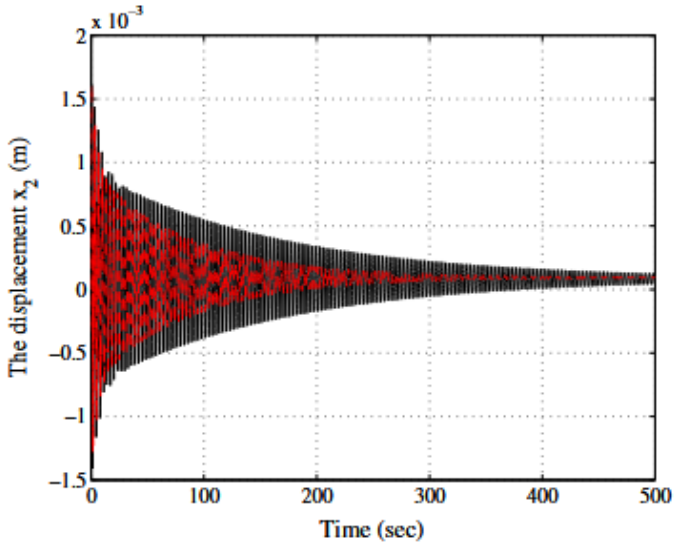
Cycle limite. (bleu, rouge) → (original, réduit)

✓ Application du contrôleur d'ordre réduit

$$\tilde{\mu} = \mu_c (1+\varepsilon), \ \mu_c = 0.2538$$







(bleu, rouge)→ $\left(\varepsilon = 10^{-3}, \varepsilon = 10^{-2}\right)$

(rouge, noir)→ $\left(\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.2\right)$

> *L. Nechak,* ***Robust nonlinear control synthesis by using centre manifold-based reduced models for the mitigating of friction-induced vibration****,* ***Nonlinear Dynamics, 108, 1885-1901, 2022***

Conclusion

- ✓ Réduction de modèles non-linéaires pour la synthèse de commande d'ordre réduit
  - Méthodes déployées
    - Variété centrée pour la réduction
    - Technique de contrôle robuste par modes glissants

- ✓ Application au contrôle des vibrations induites par le frottement
  - Stabilité du système de commande en boucle fermée
  - Robustesse du schéma de commande, observée par simulation