Stabilité des systèmes non-linéaires à commutation avec retards de détection des modes actifs

K.M.D. MOTCHON , L. ETIENNE et S. LECOEUCHE

15 novembre 2018

IMT Lille Douai
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

Plan de la présentation

Sommaire

Considérons le système à commutation :

$$\dot{x}(t) = F_{\sigma(t)}(x(t), u(t), \lambda(t), v(t)), \quad \forall t \notin \{t_k^\sigma\}_{k\in\mathbb{N}} \tag{1}$$

- $\sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{P} \subset \mathbb{N}$, le signal de commutation
- t_k^σ, instants de commutation
- $x(t)$, le vecteur d'état
- $\lambda(t)$, incertitude paramétrique
- $v(t)$, entrée inconnue (perturbation)

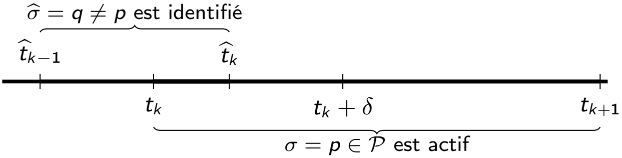
Commande u dépendant des modes :

$$u(t) = G_{\widehat{\sigma}(t)}(x(t)), \quad \forall t \neq t_k^\sigma, \forall t \neq t_k^{\widehat{\sigma}} \tag{2}$$

- $\widehat{\sigma} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{P}$, une estimation de σ
- $t_k^{\widehat{\sigma}}$, estimation de t_k^σ

Hypothèses sur σ et $\widehat{\sigma}$

- Délai maximum δ de détection du mode actif, $t_k^{\widehat{\sigma}} - t_k^{\sigma} \leq \delta$



- Signal de commutation lent : MDT (minimum dwell time), ADT (average dwell time)

Problèmes : Analyse de stabilité et synthèse de commande du système (1)–(2).

Sommaire

- Pas d'entrée inconnue (perturbé) : (1)–(2) $\Longrightarrow$ système de commutation de la forme

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)\,\widehat{\sigma}(t)}\left(x(t), \lambda(t)\right), \quad \forall t \notin \{t_k^\sigma\}_{k\in\mathbb{N}^\star} \cup \{t_k^{\widehat{\sigma}}\}_{k\in\mathbb{N}^\star}$$
$$x(t) = \lim_{s\to t, s<t} x(s), \quad \forall t \in \{t_k^\sigma\}_{k\in\mathbb{N}^\star} \cup \{t_k^{\widehat{\sigma}}\}_{k\in\mathbb{N}^\star}$$

- Hypothèses
  - Incertitudes polytopiques :

$$f_{\sigma(t)\,\widehat{\sigma}(t)}\left(x(t), \lambda(t)\right) \in \mathrm{conv}\left\{f^1_{\sigma(t)\,\widehat{\sigma}(t)}\left(x(t)\right), \ldots, f^m_{\sigma(t)\,\widehat{\sigma}(t)}\left(x(t)\right)\right\}$$

  - Délai maximum δ de détection du mode actif, $t_k^{\widehat{\sigma}} - t_k^\sigma \leq \delta$
  - MDT (minimum dwell time) : $t_{k+1}^\sigma - t_k^\sigma \geq \boldsymbol{\tau}_s$
  - Détection du mode actif avant écoulement du temps de séjour : $\boldsymbol{\tau}_s > \delta$
- Question : déterminer des conditions suffisantes sur $f^r_{p\,q}$, $\boldsymbol{\tau}_s$ et δ pour que le système non-linéaire à commutation soit asymptotiquement stable.

Sommaire

■ Formalisme hybride de Goebel et al. (2012)

$$\mathcal{H}:\begin{cases}\xi\in\mathscr{C}_{\mathcal{H}}, & \dot{\xi}\in F_{\mathcal{H}}(\xi),\\ \xi\in\mathscr{D}_{\mathcal{H}}, & \xi^{+}\in G_{\mathcal{H}}(\xi).\end{cases}$$

- ξ état hybride du système
- $\mathscr{C}_{\mathcal{H}}$ espace des "flow" ; $F_{\mathcal{H}}(\xi)$ fonction des "flow"
- $\mathscr{D}_{\mathcal{H}}$ espace de "jump" ; $G_{\mathcal{H}}(\xi)$ fonction de "jump"

■ Résultat de stabilité des systèmes hybrides

Théorème (R. Goebel et al. 2012). Soit $\mathscr{A}\subseteq\mathbb{R}$ un ensemble fermé. Si $\mathbf{V}:\operatorname{dom}\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov candidate du système $\mathcal{H}$ et s'il existe $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{K}_\infty$ et une fonction définie-positive $\rho:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ t.q.

(a) $\forall v\in\overline{\mathscr{C}_{\mathcal{H}}}\cup\mathscr{D}_{\mathcal{H}}\cup G\left(\mathscr{D}_{\mathcal{H}}\right)$, $\alpha_1\left(|v|_{\mathscr{A}}\right)\leq\mathbf{V}(v)\leq\alpha_2\left(|v|_{\mathscr{A}}\right)$

(b) $\forall v\in\mathscr{C}_{\mathcal{H}}$, $\varphi\in F_{\mathcal{H}}(v)$, $\langle\nabla\mathbf{V}(v),\varphi\rangle\leq-\rho\left(|v|_{\mathscr{A}}\right)$

(c) $\forall v\in\mathscr{D}_{\mathcal{H}}$, $\forall\psi\in G_{\mathcal{H}}(v)$, $\mathbf{V}(\psi)-\mathbf{V}(v)\leq-\rho\left(|v|_{\mathscr{A}}\right)$

alors $\mathscr{A}$ est UGpAS pour le système $\mathcal{H}$.

R. Goebel, R.G. Sanfelice and A.R. Teel. *Hybrid Dynamical Systems : modeling, stability, and robustness*, Princeton University Press, 2012.

- État hybride

$$\xi = \begin{pmatrix} x & \sigma & \widehat{\sigma} & \tau & s \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}^2 \times \mathbb{R}^+ \times \{0,1\}$$

☞ τ un “timer”
☞ s variable logique indiquant la possibilité du système à commuter

- Espace et fonction de “flow”

$$F_{\mathcal{H}}(\xi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} f_{p\,q}^\top(x,\lambda) & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top & \text{si} \quad \xi \in \mathscr{C}_{p\,q}, \\ \begin{pmatrix} f_{p\,p}^\top(x,\lambda) & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top & \text{si} \quad \xi \in \mathscr{C}_p^0 \bigcup \mathscr{C}_p^1, \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

☞ $\mathscr{C}_{p\,q} = \{\xi : \sigma = p \neq q = \widehat{\sigma},\, s = 1,\, \tau \in [0\,;\delta]\}$
☞ $\mathscr{C}_p^0 = \{\xi : \sigma = \widehat{\sigma} = p,\, s = 0,\, \tau \in [0\,;\boldsymbol{\tau}_s]\}$
☞ $\mathscr{C}_p^1 = \{\xi : \sigma = \widehat{\sigma} = p,\, s = 1,\, \tau \in [\boldsymbol{\tau}_s\,;+\infty[\}$

$$\mathscr{C}_{\mathcal{H}} = \left(\cup_{p \neq q \in \mathcal{P}} \mathscr{C}_{p\,q}\right) \cup \left(\cup_{p \in \mathcal{P}} \mathscr{C}_p^0\right) \cup \left(\cup_{p \in \mathscr{Q}} \mathscr{C}_p^1\right)$$

- Espace et fonction de "jump"

$$G(\xi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x^\top & \sigma & \sigma & \tau & 0 \end{pmatrix}^\top & \text{si} \quad \xi \in \mathscr{D}_{p\,q} = \mathscr{C}_{p\,q}, \\ \begin{pmatrix} x^\top & \sigma & \widehat{\sigma} & \tau & 1 \end{pmatrix}^\top & \text{si} \quad \xi \in \mathscr{D}_p^0, \\ \begin{pmatrix} x^\top & \mathcal{P} \setminus \{p\} & \widehat{\sigma} & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top & \text{si} \quad \xi \in \mathscr{D}_p^1 = \mathscr{C}_p^1, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

☞ $\mathscr{D}_p^0 = \{\xi\colon s = 0, \tau = \boldsymbol{\tau}_s,\ \sigma = \widehat{\sigma} = p\}$

$$\mathscr{D}_{\mathcal{H}} = \left(\cup_{p \neq q \in \mathcal{P}} \mathscr{D}_{p\,q}\right) \cup \left(\cup_{p \in \mathcal{P}} \mathscr{D}_p^0\right) \cup \left(\cup_{p \in \mathcal{P}} \mathscr{D}_p^1\right)$$

UGpAS de l'ensemble

$$\mathscr{A} = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} x & \sigma & \widehat{\sigma} & \tau & s \end{pmatrix}^{\top} : x = 0_n, \sigma \in \mathscr{Q}, \widehat{\sigma} \in \mathscr{Q}, \tau \in \mathbb{R}_+ \text{ et } s \in \{0, 1\} \right\}$$

par rapport au système hybride $\mathcal{H}$

Sommaire

Théorème (Etienne et al. 2018). Supposons qu'il existe des fonctions continument dérivables $V_{p\,q}$, V_p, $p, q \in \mathcal{P}$ et des fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$, $\underline{\kappa}_{p\,q}$, $\overline{\kappa}_{p\,q}$, $\underline{\alpha}_{p\,q}$, $\overline{\alpha}_{p\,q}$ et ρ telles que

(a) $\forall p, q \in \mathcal{P}$,

$$\begin{array}{l} \underline{\kappa}_{p\,q}(\|x\|) \leq V_{p\,q}(x,\tau) \leq \overline{\kappa}_{p\,q}(\|x\|), \quad \forall \tau \in [0\,;\eta_{p\,q}] \\ \underline{\alpha}_p(\|x\|) \leq V_p(x,\tau) \leq \overline{\alpha}_p(\|x\|), \quad \forall \tau \in [\boldsymbol{\tau}_s\,;+\infty[\end{array}$$

avec

$$\eta_{p\,q} = \begin{cases} \delta & \text{if} \quad p \neq q \\ \boldsymbol{\tau}_s & \text{if} \quad p = q \end{cases}$$

(b) $\forall p, q \in \mathcal{P}$ et $\forall r = 1, 2, \ldots, m$

$$\begin{array}{l} \left\langle \partial_x V_{p\,q}(x,\tau), f^r_{p\,q}(x) \right\rangle + \partial_\tau V_{p\,q}(x,\tau) \leq -\rho(\|x\|), \quad \forall \tau \in [0\,;\eta_{p\,q}] \\ \left\langle \partial_x V_p(x,\tau), f^r_{p\,p}(x) \right\rangle + \partial_\tau V_p(x,\tau) \leq -\rho(\|x\|), \quad \forall \tau \in [\boldsymbol{\tau}_s\,;+\infty[\end{array}$$

(c) $\forall p \neq q \in \mathscr{Q}$,

$$\begin{array}{l} V_{p\,p}(x,\tau) - V_{p\,q}(x,\tau) \leq -\rho(\|x\|), \quad \forall \tau \in [0\,;\delta] \\ V_p(x,\boldsymbol{\tau}_s) - V_{p\,p}(x,\boldsymbol{\tau}_s) \leq -\rho(\|x\|) \\ V_{p\,q}(x,0) - V_q(x,\tau) \leq -\rho(\|x\|), \quad \forall \tau \in [\boldsymbol{\tau}_s\,;+\infty[\end{array}$$

Alors l'ensemble $\mathscr{A}$ est UGpAS pour le système $\mathcal{H}$.

L. Etienne, K.M.D. Motchon and S. Lecoeuche, Stability analysis for switched uncertain nonlinear systems with dwell time and delay in the active mode detection. IEEE Control Systems Letters, 2018 (Accepted)

$$Q\colon \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est un polynôme } \textbf{SoS} \iff Q(z) = \sum_{i=1}^{\kappa} h_i^2(z),\ \forall z \in \mathbb{R}^r$$

Théorème (Etienne et al. 2018). Supposons que $\forall p, q \in \mathcal{P}$ et $\forall k = 1, 2, \ldots, m$ les fonctions $f^k_{p\,q}$ soient polynomiales. S'il existe $\varepsilon > 0$ et des polynômes **SoS** $V_{p\,q}(x,\tau)$, $V_p(x)$, $\pi_{p\,q}(x,\tau)$, $\widetilde{\pi}_{p\,q}(x,\tau)$ et $\bar{\pi}_p(x,\tau)$ t.q.

(a) $\forall p, q \in \mathcal{P}$,

$$\begin{array}{l} V_{p\,q}(x,\tau) - \pi_{p\,q}(x,\tau)\ \mu_{\eta_{p\,q}}(\tau) - \varepsilon\, \|x\|^2 \text{ est } \textbf{SoS} \\ V_p(x) - \varepsilon\, \|x\|^2 \text{ est } \textbf{SoS} \end{array}$$

(b) $\forall p, q \in \mathcal{P}$ et $\forall r = 1, 2, \ldots, m$

$$\begin{array}{l} -\left\langle \partial_x V_{p\,q}(x,\tau), f^r_{p\,q}(x) \right\rangle - \partial_\tau V_{p\,q}(x,\tau) - \widetilde{\pi}_{p\,q}(x,\tau)\ \mu_{\eta_{p\,q}}(\tau) - \varepsilon\, \|x\|^2 \text{ est } \textbf{SoS} \\ \left\langle \partial_x V_p(x), f^r_{p\,p}(x) \right\rangle - \varepsilon\, \|x\|^2 \text{ est } \textbf{SoS} \end{array}$$

(c) $\forall p \neq q \in \mathcal{P}$,

$$\begin{array}{l} V_{p\,q}(x,\tau) - V_{p\,p}(x,\tau) - \mu_\delta(\tau) - \varepsilon\, \|x\|^2 \text{ est } \textbf{SoS} \\ V_{p\,p}(x,\boldsymbol{\tau}_s) - V_p(x) - \varepsilon\, \|x\|^2 \text{ est } \textbf{SoS} \\ V_q(x) - V_{p\,q}(x,0) - \bar{\pi}_p(x,\tau)\ \tau - \varepsilon\, \|x\|^2 \text{ est } \textbf{SoS} \end{array}$$

où $\mu_\beta(\tau) = \tau\,(\beta - \tau)$, $\beta \in \{\eta_{p\,q}, \delta\}$ alors $\mathscr{A}$ est UGpAS pour le système $\mathcal{H}$.

Sommaire

1. Formulation générale des problèmes traités
2. Analyse de la stabilité : cas non perturbé
   - Formalisme hybride du système
   - Conditions suffisantes de stabilité
   - Exemple numérique
3. Analyse de la stabilité et synthèse de commande : cas sans incertitude
   - Conditions générales d'analyse de la stabilité
   - Conditions SoS pour l'analyse dans le cas polynomial
   - Synthèse de la commande dans le cas linéaire
4. Travaux en cours

- $\mathbb{R}^2 \ni \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(x(t), \boldsymbol{\theta}) + B_{\sigma(t)}\, u(t)\,;\; u(t) = K_{\widehat{\sigma}(t)}\, x(t) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\theta} \in [-1.3\,; -0.9] \quad ; \quad \sigma(t) \in \{1,2\} \quad ; \quad \widehat{\sigma}(t) \in \{1,2\} \\
&A_1(x,\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + \boldsymbol{\theta}\, x_1^3 + x_1\, x_2 \\ 2\, x_2 \end{pmatrix} ;\; B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;\; K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}^{\top} \\
&A_2(x,\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \boldsymbol{\theta}\, x_2^3 - x_2 + x_1 \end{pmatrix} ;\; B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\; K_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}^{\top} .
\end{aligned}$$

- $\mathcal{P} = \{1,2\}\,;\; m = 2\,;$ sommets du polytope

$$p, q = 1, 2, \quad f^1_{p\,q}(x) = A_p(x, \underline{\boldsymbol{\theta}}) + B_p\, K_q\, x \quad \text{et} \quad f^2_{p\,q}(x) = A_p\left(x, \overline{\boldsymbol{\theta}}\right) + B_p\, K_q\, x$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x} = f_{\sigma\,\widehat{\sigma}}(x)\,, \quad \sigma(t) \in \mathcal{P}, \widehat{\sigma}(t) \in \mathcal{P} \text{ et } f_{p\,q}(x) \in \operatorname{conv}\left\{ f^1_{p\,q}(x)\,, f^2_{p\,q}(x) \right\}$$

- Résultats numériques, $\boldsymbol{\tau}_s = 2$

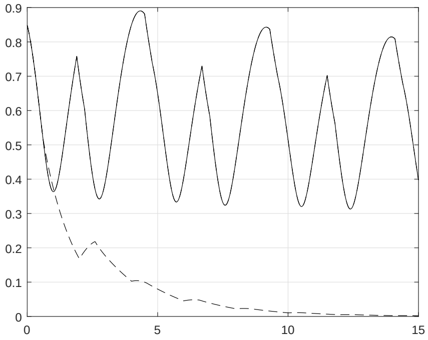


Figure – $\|x(\cdot)\|$ pour $\delta = 0.6$ (en pointillé) et $\delta = 1.7$ (en ligne continue)

- Stabilité asymptotique garantie jusqu'à $\delta = 0.6$.

Sommaire

Sommaire

- Pas d'incertitude : (1)–(2) $\implies$ système de commutation de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\sigma(t)\,\widehat{\sigma}(t)}\left(x(t), v(t)\right), \quad \forall t \notin \{t_k^{\sigma}\}_{k\in\mathbb{N}^\star} \cup \{t_k^{\widehat{\sigma}}\}_{k\in\mathbb{N}^\star} \\ x(t) &= \lim_{s\to t, s<t} x(s), \quad \forall t \in \{t_k^{\sigma}\}_{k\in\mathbb{N}^\star} \cup \{t_k^{\widehat{\sigma}}\}_{k\in\mathbb{N}^\star} \end{aligned}$$

- Hypothèses
  - Délai maximum δ de détection du mode actif, $t_k^{\widehat{\sigma}} - t_k^{\sigma} \leq \delta$
  - ADT (average dwell time) : $\mathcal{N}_\sigma(t,s) \leq N_0 + \frac{t-s}{\boldsymbol{\tau}_a}, \forall t \geq s$

- Question : déterminer des conditions suffisantes sur f_{pq}, $\boldsymbol{\tau}_a$ et δ pour que le système non-linéaire à commutation soit ISS (input-to-state stable) : $\exists \alpha, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ et $\beta \in \mathcal{KL}$ telles que $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall v \in \mathcal{V}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^\ell\right)$,

$$\alpha\left(\|x(t)\|\right) \leq \beta\left(\|x_0\|, t - t_0\right) + \gamma\left(\|v\|_{[t_0;t)}\right), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Théorème (Motchon et al. 2018). S'il existe des fonctions continument dérivables $V_p \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0\,;\infty)$, $p \in \mathcal{P}$, des fonctions α_1, α_2 et ρ de classe $\mathcal{K}_\infty$, et des constantes $\mu \geq 1$, $\lambda_0 > 0$ et $\lambda \geq 0$ telles que

(a) $\forall p \in \mathcal{P},\ \alpha_1\left(\|x\|\right) \leq V_p\left(x\right) \leq \alpha_2\left(\|x\|\right)$

(b) $\forall p, q \in \mathcal{P},\ \left[\nabla V_p\left(x\right)\right]^\top\ f_{q\,p}\left(x, v\right) \leq \lambda_{q\,p}\, V_p\left(x\right) + \rho\left(\|v\|\right)$ avec

$$\lambda_{q\,p} = \begin{cases} -\lambda_0 & \text{if} \quad p = q, \\ \lambda & \text{if} \quad p \neq q. \end{cases}$$

(c) $\forall p, q \in \mathcal{P},\ V_p\left(x\right) \leq \mu\, V_q\left(x\right)$

alors le système bouclé est ISS lorsque $\boldsymbol{\tau}_a > [\ln \mu + (\lambda_0 + \lambda)\ \delta]/\lambda_0$.

K.M.D. Motchon, L. Etienne, and S. Lecoeuche, Input-to-state stability of switched nonlinear system with delay in the active mode detection and average dwell-time, Int J Robust Nonlinear Control, 2018 (Soumis)

- Fonctions α, β et γ :

$$\alpha = \alpha_1 \quad ; \quad \beta\left(\|x_0\|, t - t_0\right) = \mu^{N_0+1}\, \mathrm{e}^{(N_0+1)\,(\lambda_0+\lambda)\delta}\, \mathrm{e}^{-(t-t_0)\,\gamma_a}\, \alpha_2\left(\|x_0\|\right)$$

$$\gamma\left(\|v\|_{[t_0;t)}\right) = \frac{\mu\,\mathrm{e}^{(N_0+1)\,\lambda_0\,\tau_a+(\lambda_0+\lambda)\,\delta}}{\left(1-\mathrm{e}^{-\tau_a\,\gamma_a}\right)\,\lambda_0}\,\rho\left(\|v\|_{[t_0;t)}\right)$$

avec

$$\gamma_a = \lambda_0 - \frac{\ln\mu + (\lambda_0+\lambda)\,\delta}{\tau_a}.$$

- $\delta = 0 \implies$ Conditions ISS de Vu et al. (2007)
  - ☞ Condition (b) : $\left[\nabla V_p(x)\right]^\top f_{p\,p}(x, v) \leq -\lambda_0\, V_p(x) + \rho\left(\|v\|\right)$
  - ☞ Condition ADT : $\tau_a > \ln(\mu)/\lambda_0$

L. Vu, D. Chatterjee and D. Liberzon, Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control. Automatica, 43 : 639–646, 2007.

Sommaire

Théorème (Motchon et al. 2018). Supposons que les fonctions F_p et G_p soient polynomiales. S'il existe des fonctions polynomiales définies positives V_p, des constantes $\mu \geq 1$, $\lambda_0 > 0$, $\lambda \geq 0$, $\varepsilon > 0$ et $\theta > 0$ telles que

(a) $\forall p \in \mathcal{P},\ V_p(x) - \varepsilon \left\|x\right\|^2$ est **SOS**

(b) $\forall p, q \in \mathcal{P},\ -\left[\nabla V_p(x)\right]^\top f_{q\,p}(x, v) + \lambda_{q\,p} V_p(x) + \theta \left\|v\right\|^2$ est **SOS** avec

$$\lambda_{q\,p} = \begin{cases} -\lambda_0 & \text{if} \quad p = q, \\ \lambda & \text{if} \quad p \neq q. \end{cases}$$

(c) $\forall p, q \in \mathcal{P},\ \mu V_q(x) - V_p(x)$ est **SOS**

alors le système bouclé est ISS lorsque $\boldsymbol{\tau}_a > [\ln \mu + (\lambda_0 + \lambda)\,\delta]/\lambda_0$.

- Modèle thermique simplifié d'un bâtiment à deux chambres, Meyer et al. (2014) :

$$\dot{\Theta}_i = \sum_{j \in J} \varsigma_{i\,j}\,(\Theta_j - \Theta_i) + \varsigma_{i\,ext}\,(\Theta_{ext} - \Theta_i) + \kappa_i\,\omega_i\,\left(\overline{\Theta}_i^4 - \Theta_i^4\right) + u_i$$

  - $J = \{1, 2\}$
  - Θ_i, température de la chambre $i \in \{1, 2\}$
  - Θ_{ext}, température extérieure
  - $\varsigma_{i\,j}$ coefficients de transfert de la chaleur
  - $\omega_i \in \{0, 1\}$ est une perturbation ; $\omega_i = 1 \implies$ présence humaine dans la chambre i

- Variable d'état, $x = \begin{bmatrix}\Theta_1 & \Theta_2\end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix}\Theta_1^{obj} & \Theta_2^{obj}\end{bmatrix}^\top$

- Objectif : Maintenir la température des chambres autour de $\Theta^{obj} = \begin{bmatrix}\Theta_1^{obj} & \Theta_2^{obj}\end{bmatrix}^\top$ en utilisant une commande

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5(\Theta_1^{obj} - \Theta_1) - \varsigma_{1\,ext}\,(\Theta_{ext} - \Theta_1) - \hat{\omega}_1\kappa_1\left(\overline{\Theta}_1^4 - \Theta_1^4\right) \\ 0.5(\Theta_2^{obj} - \Theta_2) - \varsigma_{2\,ext}\,(\Theta_{ext} - \Theta_2) - \hat{\omega}_2\kappa_2\left(\overline{\Theta}_2^4 - \Theta_2^4\right) \end{pmatrix}$$

P-J. Meyer, H. Nazarpour, A. Girard and E. Witrant, Experimental implementation of UFAD regulation based on robust controled invariance. In : 13th European Control Conference, 1468–1473, June 24-27, 2014.

Paramètres	Résultats
$\varepsilon = 5,\ N_0 = 2$	$\mu^{N_0+1}\,\mathrm{e}^{(N_0+1)\,(\lambda_0+\lambda)\delta} = 3.3$
$\mu = 1.1$	$\alpha_2(\lvert x\rvert) = 0.2\lvert x\rvert^6 + 2.2\lvert x\rvert^4 + 15\lvert x\rvert^2$
$\delta = 1$	$\gamma_a = 1\,;\ \tau_a = 3\,;\ \theta = 510^{-5}$
$\lambda = \lambda_0 = 0.1$	$\dfrac{\mu\,\mathrm{e}^{(N_0+1)\,\lambda_0\,\tau_a+(\lambda_0+\lambda)\,\delta}}{(1-\mathrm{e}^{-\tau_a\,\gamma_a})\ \lambda_0} = 15\,;\ \rho(\lVert v\rVert) = \theta\, v_1^2 + \theta^2\, v_2^2 + \theta^4\, v_2^4$

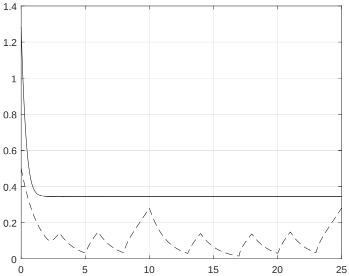


Figure – Norme $\lVert x(\cdot)\rVert$ de $x = \begin{bmatrix}\Theta_1 & \Theta_2\end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix}\Theta_1^{obj} & \Theta_2^{obj}\end{bmatrix}^\top$ (en pontillé) et l'estimation de la borne limite sur l'erreur de stabilisation (en ligne continue).

Sommaire

$$F_{\sigma(t)}\left(x(t), u(t), v(t)\right) = A_{\sigma(t)}\, x(t) + B_{\sigma(t)}\, u(t) + E_{\sigma(t)}\, v(t) \quad ; \quad u(t) = K_{\widehat{\sigma}(t)}\, x(t).$$

Théorème (Motchon et al. 2018). S'il existe des constantes $\lambda_0 > 0$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 1$ et $\theta > 0$, des matrices définies positives $S_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p \in \mathcal{P}$ et des matrices $U_p \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telles que :

(a) $\forall (p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, $A_q\, S_p + B_q\, U_p + S_p\, A_q^\top + U_p^\top\, B_q^\top - \lambda_{q\,p}\, S_p + \dfrac{1}{\theta}\, E_q\, E_q^\top \preceq 0$ avec

$$\lambda_{q\,p} = \begin{cases} -\lambda_0 & \text{if} \quad p = q, \\ \lambda & \text{if} \quad p \neq q. \end{cases}$$

(b) $(p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, $S_p - \mu\, S_q \preceq 0$

alors pour les gains

$$K_p = U_p\, S_p^{-1}, \quad p \in \mathcal{P}$$

le système bouclé est ISS lorsque $\boldsymbol{\tau}_a > [\ln \mu + (\lambda_0 + \lambda)\, \delta]/\lambda_0$.

Cas où $E_q = 0_{n\times\ell}$ et $v \equiv 0$

- Notre condition ISS $\Longrightarrow$ Condition UGAS de Zhang and Gao (2010)

$$\alpha_1\left(\|x(t)\|\right) \leq \mu^{N_0+1}\,\mathrm{e}^{(N_0+1)\,(\lambda_0+\lambda)\delta}\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)\,\gamma_a}\,\alpha_2\left(\|x_0\|\right)$$

- Notre résultat de synthèse $\Longrightarrow$ Résultats de synthèse de Zhang and Gao (2010)

L. Zhang and H. Gao, Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time. Automatica, 46 : 953–958, 2010.

Commande commutée du modèle à commutation de suspension de véhicule de Du et al. (2014)

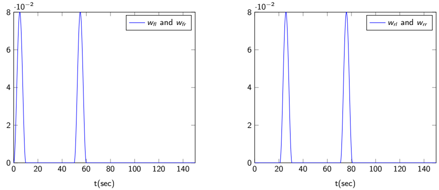
$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B_{\sigma(t)}\,u(t) + E\,v(t) \quad ; \quad u(t) = K_{\widehat{\sigma}(t)}\,x(t)$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^{14}$
- $u(t) \in \mathbb{R}$, force appliquée aux roues
- $v(t) \in \mathbb{R}^4$, entrée inconnue modélisant les imperfections de la route

H. Du, N. Zhang and L. Wang, Switched control of vehicle suspension based on motion-mode detection. Vehicle System Dynamics, 52(1) : 142–165, 2014.

- Valeur des paramètres : $\delta = 0.5$, $\mu = 1.5$, $\lambda_0 = 0.04$, $\lambda = 0.01$ et $\theta = 63.50$

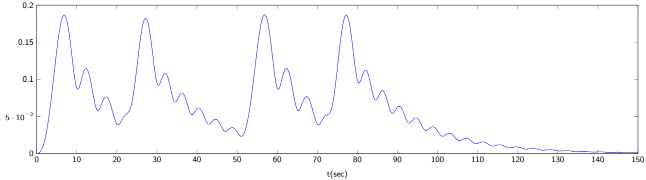
Figure – Profil de la route



(a) Perturbations sur les pneus avant

(b) Perturbations sur les pneus arrière

Figure – Évolution de la norme $\|x(\cdot)\|$ du vecteur d'état



Sommaire

- Extension du résultat de synthèse au cas non-linéaire avec des méthodes **SoS**
- Hypothèses de MDADT (mode-dependent average dwell time) sur σ

Merci pour votre attention